	عنوان الدرس : الحساب العددي المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 12 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
*النشر والتعميل بالنسبة للأعداد الجذرية *القوى بالنسبة للأعداد الجذرية *المعادلات بالنسبة للأعداد الجذرية	*استعمال المتطابقات الهامة التالية في الاتجاهين: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2a+b^2$ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ *التعرف على خاصيات القوى واستعمالها *استعمال القوى ذات الأساس 10 خاصة عند دراسة الترتيب والقيمة المقربة أو الكتابة العلمية.	*يتابع في هذا المستوى الاستعمال التدريجي للحساب الحرفي وتعويد التلاميذ على ممارسته من خلال نشر وتبسيط تعابير جبرية أو تعميلها. *ينبغي التركيز على استعمال المتطابقات الهامة في النشر والتعميل مع الأخذ بعين الاعتبار أن التعرف على المتطابقات الهامة ليس في متناول جميع التلاميذ.

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية

المتطابقات الهامة

I _ النشر و التعميل :

1) – النشـر :

أ) -- قاعدة 1 :

a و b و c أعداد حقيقية .

$a(b+c)=ab+ac$ و $(b+c)\times a=ab+ac$

$a(b-c)=ab-ac$ و $(b-c)\times a=ab-ac$

* مثال :

$$A=2x(x+4)$$
$$=2x\times x+2x\times 4$$
$$=2x^2+8x$$

$$B=(-3x-5)\times(-4x)$$
$$=-4x\times(-3x)-(-4x)\times 5$$
$$=12x^2+20x$$

تمرين1

x عدد حقيقي.

نضع :

$M=4x^2-(6x+5)^2$ و

$N=(2x+7)(8x+5)$.

1) – أنشر ثم بسط M و N .

2) – عمل M ثم $M+N$.

تمرين2

نعتبر التعابير الآتية :

$A=(2x+1)^2-(3x-5)^2$;;

$B=4x^2-25-(3x+1)(5-2x)-20x+50$

ب) -- قاعدة 2 :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=ac+ad+bc+bd$$

* مثال :

$$C=(2-x)(3x+1)$$
$$=2(3x+1)-x(3x+1)$$
$$=6x+2-3x^2-x$$
$$=-3x^2+6x-x+2$$
$$=-3x^2+5x+2$$

$$D=(-2x-4)(-3-x)$$
$$=-2x(-3-x)-4(-3-x)$$
$$=6x+2x^2+12+4x$$
$$=2x^2+6x+4x+12$$
$$=2x^2+10x+12$$

* تمرين تطبيقي :

أنشر ثم بسط ما يلي :

$$C=4x^2-20x+25$$

1) – أنشر ثم بسط : A و B .

2) – عمـل : A و B و C .

تمرين3

نضع :

$A=x^2-x-6$ و $B=x+4$ و
$C=x^4+3x^3-10x^2-24x$

1) – بين أن :

$A\times B=x^3+3x^2-10x-24$.

2) – تحقق أن : $A=(x-3)(x+2)$.

3) – استنتج تعميل العدد C .

تمرين4

a و b و c أعداد حقيقية .

أثبت أن :

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2(ab-ac-bc)$$

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab-ac-bc)$$

$$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2(ab+ac-bc)$$

$$A=3x(2x+1)+(3x-2)(x+7)$$

$$B=2\sqrt{3}\left(x+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-2x\right)$$

الحـل :

$$\begin{aligned}A&=3x(2x+1)+(3x-2)(x+7)\\&=6x^2+3x+3x(x+7)-2(x+7)\\&=6x^2+3x+3x^2+21x-2x-14\\&=6x^2+3x^2+3x+21x-2x-14\\&=9x^2+22x-14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=2\sqrt{3}\left(x+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-2x\right)\\&=2x\sqrt{3}+2\sqrt{3}^2-\sqrt{5}^2+2x\sqrt{5}\\&=2x\sqrt{3}+2x\sqrt{5}+6-5\\&=2x\sqrt{3}+2x\sqrt{5}+1\end{aligned}$$

2) – التعميـــل :

أ) -- قاعدة :

a و b و c أعداد حقيقية .

$$ab+ac=a(b+c)$$

$$ab-ac=a(b-c)$$

ب) -- مثال :

$$A = 2abc + 7ab - 11ac$$
$$= a(2bc + 7b - 11c)$$

$$B = 2x(x-1) + (x-1)(4x+5)$$
$$= (x-1)[2x + (4x+5)]$$
$$= (x-1)(2x + 4x + 5)$$
$$= (x-1)(6x+5)$$

* تمرين تطبيقي :

عمل ما يلي :

$$A = 8xy + 12x^2y - 4xy^2$$
$$B = (2x+1)(5-x) - (2x+1)(7x+3)$$

الحل :

$$A = 8xy + 12x^2y - 4xy^2$$
$$= 4xy(2 + 3x - y)$$

$$B = (2x+1)(5-x) - (2x+1)(7x+3)$$
$$= (2x+1)[(5-x) - (7x+3)]$$
$$= (2x+1)(5 - x - 7x - 3)$$
$$= (2x+1)(-x - 7x + 5 - 3)$$
$$= (2x+1)(-8x+2)$$
$$= (2x+1) \times 2(-4x+1)$$
$$= 2(2x+1)(-4x+1)$$

II _ المتطابقات الهـامة :

1) – قواعد :

a و b عددان حقيقيان .

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2) – تطبيقات :

* المتطابقات الهامة والنشر :

$$B = (5-7x)^2$$
$$= 5^2 - 2\times 5\times 7x + (7x)^2$$
$$= 25 - 70x + 49x^2$$

$$C = (2\sqrt{2}+3x)(2\sqrt{2}-3x)$$
$$= (2\sqrt{2})^2 - (3x)^2$$
$$= 8 - 9x^2$$

$$A = (2x+3)^2$$
$$= (2x)^2 + 2\times 2x\times 3 + 3^2$$
$$= 4x^2 12x + 9$$

* المتطابقات الهامة و التعميـل :

$$E = 16 - 56x + 49x^2$$
$$= (4)^2 - 2 \times 4 \times 7x + (7x)^2$$
$$= (4 - 7x)^2$$

$$F = 144x^2 - 4$$
$$= (12x)^2 - 2^2$$
$$= (12x - 2)(12x + 2)$$

$$D = 25x^2 + 30x + 9$$
$$= (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2$$
$$= (5x + 3)^2$$

* تمرين تطبيقي :

1) – أنشر ثم بسط ما يلي :

$$A = (2x+1)^2 - (3x+5)(3x-5)$$
$$B = (7-2x)^2 + 4x(1-x)$$

2) – عمـل ما يلي :

$$C = 25x^2 - 4 + (5x-2)(5x+6)$$
$$D = 9x^2 - 6x + 1 + 5x(3x+1)$$

الحـل :

1) – النشر و التبسيط :

$$\begin{aligned} A &= (2x+1)^2 - (3x+5)(3x-5) \\ &= \left[(2x)^2 + 2\times 2x \times 1 + 1^2\right] - \left[(3x)^2 - 5^2\right] \\ &= \left[4x^2 + 4x + 1\right] - \left[9x^2 - 25\right] \\ &= 4x^2 + 4x + 1 - 9x^2 + 25 \\ &= 4x^2 - 9x^2 + 4x + 1 + 25 \\ &= -5x^2 + 4x + 26 \end{aligned}$$

$$B=(7-2x)^2+4x(1-x)$$
$$=\left[7^2-2\times7\times2x+(2x)^2\right]+\left[4x-4x^2\right]$$
$$=49-28x+4x^2+4x-4x^2$$
$$=4x^2-4x^2-28x+4x+49$$
$$=-24x+49$$

2) – التعميـل :

$$D=9x^2-6x+1+5x(3x+1)$$
$$=(3x)^2-2\times3x\times1+1^2+5x(3x+1)$$
$$=(3x-1)^2+5x(3x+1)$$
$$=(3x-1)(3x+1)+5x(3x+1)$$
$$=(3x+1)\left[(3x-1)+5x\right]$$
$$=(3x+1)(3x-1+5x)$$
$$=(3x+1)(8x-1)$$

$$C=25x^2-4+(5x-2)(5x+7)$$
$$=(5x)^2-2^2+(5x-2)(5x+7)$$
$$=(5x-2)(5x+2)+(5x-2)(5x+7)$$
$$=(5x-2)\left[(5x+2)+(5x+7)\right]$$
$$=(5x-2)(5x+2+5x+7)$$
$$=(5x-2)(10x+9)$$

القوى

I قوة عدد حقيقي :

1) – تعريف :

x عدد حقيقي و n عدد صحيح طبيعي .

* إذا كان $n>1$ فإن : $x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ من العوامل}}$

* إذا كان $n=1$ فإن : $x^1 = x$.

* إذا كان $n=0$ و $x \neq 0$ فإن : $x^0 = 1$.

* إذا كان $n \neq 0$ و $x = 0$ فإن : $0^n = 0$.

* إذا كان $x \neq 0$ و n عدد نسبي فإن : $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ و منه فإن : $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

تمرين5

أحسب ما يلي :

$$A = \left[1-(5^{-1})^2\right]^2 \times \left[(1-2^{-2})^{-1}\right]^{-2} \quad ;;$$

$$B = \left[\sqrt{5}^3 - (3^{-2})^2\right]^2 \times \left[\sqrt{5}^3 + (3^{-2})^2\right]^2$$

* مفردات :

نعتبر القوة a^n .

-- a يسمى أساس القوة a^n.

-- n يسمى أس القوة a^n.

-- القوة a^{-n} تسمى مقلوب القوة a^n.

2) – أمثلة :

$$\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} = \left(\sqrt{5}\right)^2\times\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{11}}\right)^0 = 1$$

$$\left(\sqrt{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\sqrt{7}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{1}{\left(\sqrt{7}\right)^2\times\sqrt{7}} = \frac{1}{7\sqrt{7}}$$

$$C = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3}{5\times(-2)^{-2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} \quad ;;$$

$$D = \left[\left(\frac{2}{5}\right)^4\times\left(\frac{4}{25}\right)^{-2}\right]^{2007} \quad ;;$$

$$E = \left[3\times\left(\frac{3}{7}\right)^2-\left(\frac{7^2}{3^3}\right)^{-1}\right]^{25}$$

تمرين6

أكتب ما يلي على شكل قوة :

$$A = (\sqrt{23})^4\times\left[\left(-\sqrt{23}\right)^2\right]^6\times\left[\left(\sqrt{23}\right)^5\right]^{-3}$$

$$;; \quad B = 25\times\left(1+\frac{3}{2}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{-11}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{-11}\right)^{2}$$
$$= \frac{49}{121}$$

II _ خصـائص القــوى :

1) – خصائص :

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين.

m و n عددان صحيحان طبيعيان.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$
$$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$$

$$C = \left(\frac{5}{7} + \frac{2^2}{7}\right)^{-5} \times \left(2^2 - \frac{19}{7}\right)^{11}$$

تمرين7

بسط ما يلي :

$$A = \frac{(2^{-7} \times 3^5)^{-2} \times 2^{12} \times 3^{-4}}{(-1)^{2451} \times (3^{-7})^2 \times 2^{-11}} \quad ;;$$

$$B = \frac{5^{-4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times (5^2)^5}{(5555)^0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-5} \times (5^{-1})^2}$$

$$C = \frac{(2\sqrt{3})^4 \times \sqrt{3}^6}{(\sqrt{3})^{-5}} \quad ;;$$

$$D = \left[\frac{(\sqrt{2})^3}{\sqrt{3}}\right]^{-4} \times \frac{\left[(\sqrt{2})^2\right]^6}{\left[(\sqrt{3})^2\right]^2}$$

2) – أمثلة :

$$\left(\sqrt{7}\right)^5 \times \left(\sqrt{7}\right)^{-2} = \left(\sqrt{7}\right)^{5+(-2)} = \left(\sqrt{7}\right)^3$$

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 \times 11^2 = \left(\sqrt{7} \times 11\right)^2 = \left(11\sqrt{7}\right)^2$$

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-2} = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{3}\right)^2} = \left(\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{3\cancel{\sqrt{3}}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\left[\left(\frac{2}{-3}\right)^2\right]^{-1} = \left(\frac{2}{-3}\right)^{2\times(-1)} = \left(\frac{2}{-3}\right)^{-2} = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{-3}{2} \times \frac{-3}{2} = \frac{9}{4}$$

تمرين8

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين.

بسط مايلي :

$$A = \frac{a^2 b^{-3} \times (ab^{-1})^{-3} \times (a^2)^{-4}}{b(a^{-5}b^{-1})^3 \times (ab)^{17}} \quad ;;$$

$$B = \frac{(a^3)^{-2} \times b^7 \times (ab)^{-2}}{(b^3)^{-2} \times a^7 \times (ab)^{-2}}$$

$$C = \frac{(a^2)^{-5}}{b^{-7}} \times \frac{(ab)^{-2}}{a^8} \times \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\right]^3 \quad ;;$$

$$D = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-4}}{\left(\frac{a}{b}\right)^8} \times \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}}{\left(\frac{b}{a}\right)^5}$$

تمرين9

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين :

m و n عددان صحيحان نسبيان (المقامات غير

III _ قــوى العدد 10 :

1) – خاصية :

n عدد صحيح طبيعي.

$10^n = 1\underbrace{00000.....0}$ و

$10^{-n} = \underbrace{0,00000.....0}1$

2) – أمثلة :

$10^5 = 100000$;; $10^7 = 10000000$

$10^{-8} = 0,00000001$;; $10^{-3} = 0,001$

منعدمة) .

بسط ما يلي :

$$A = \frac{a^{-3}b^2 \times (a^3b^0)^5 \times a \times b^3}{a^2b^{-3} \times (a^{-1} \times b^3)^{-2} \times a^3 \times b^5} \quad ;;$$

$$B = \frac{ab^2 \times (a^{-3}b)^{-2}}{a^2b \times (ab^{-3})^{-2}} \quad ;;$$

$$C = \frac{a^m \times b^{m+n} + a^{m+n} \times b^n}{a \times b^{m+1} + a^{n+1} \times b}$$

$$D = \frac{2a^n + 2}{a^{2n} + 1 + 2a^n}$$

تمرين10

حدد الكتابة العلمية للأعداد الآتية :

$$A = \frac{7 \times 10^{-3} + 3,5 \times 10^{-9}}{3,5 \times 10^5} \quad ;;$$

$$B = \frac{5 \times 10^3 + 2,5 \times 10^{-9}}{12,5 \times 10^5}$$

IV _ الكتابة العلمية :

1) – تعريف :

x عدد عشري نسبي .

الكتابة العلمية للعدد x هي :

$a.10^n$ إذا كان عددا موجبا بحيث : $1 \le a < 10$ و n عدد صحيح نسبي.

$-a.10^n$ إذا كان عددا سالبا بحيث : $1 \le a < 10$ و n عدد صحيح نسبي.

2) – أمثلة :

* الكتابة العلمية للعدد 0,000000059 :

لدينا :

$$C = \frac{2,1\times10^2 + 3,9\times10^5}{10^3} \quad ;;$$

$$D = \frac{10^{-1} + 2\times10^{-2} + 3\times10^{-2}}{11\times10^{-2} + 11\times10^{-3} + 0,004}$$

تمرين11

نعتبر العدد E بحيث :

$$E = \frac{0,006\times10^{-7}\times1,1\times(10^7)^4}{8,8\times(10^7)^3}$$

1) – بسط العدد E .

2) – أوجد الكتابة العلمية للعدد E .

3) – حدد الكتابة العشرية للعدد E .

$0,000000059 = 59\times10^{-9}$ $= 5,9\times10\times10^{-9}$ $= 5,9\times10^{1-9}$ $= 5,9\times10^{-8}$ إذن : الكتابة العلمية للعدد 0,000000059 هي : $5,9\times10^{-8}$ * الكتابة العلمية للعدد $-125,742$: لدينا : $125,742 = 1,25742\times10^{2}$ إذن : الكتابة العلمية للعدد $-125,742$ هي : $-1,25742\times10^{2}$	

	عنوان الدرس : الجذور المربعة المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 10 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
*القوى *العمليات على الأعداد الجذرية	*التعرف على أنه إذا كان a عددا حقيقيا موجبا فإن $\sqrt{a}$ هو العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a. *استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة لجذر مربع. *استعمال $\sqrt{a^2}$ و $(\sqrt{a})^2$ حيث a عدد موجب. *البحث من خلال أمثلة على قيمة أو قيم العدد x بحيث: $x^2=a$ * استعمال العلاقات التالية في أمثلة عددية لتبسيط بعض التعابير:	يتم تقديم العمليات على الأعداد الحقيقية بالقياس مع العمليات على العداد الجذرية ، ويمكن البرهنة على بعض خاصياتها باستعمال التعريف : $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$) مع التركيز على الأمثلة وعلى تثبت التقنيات. ونظرالأهمية هذه التقنيات ولصعوبة التمكن منها فإنه ينبغي العناية بها طيلة السنة الدراسية وفي جميع المناسبات سواء تعلق الأمر بدروس الجبر أو دروس الهندسة .

ثانوية أفورار الإعدادية

	$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ و $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$ *جعل مقام كسر عددا جذريا في حالات بسيطة.	

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
I _ **الجذر المربع لعدد حقيقي موجب** : مدخل : حديقة مربعة الشكل مساحتها $64m^2$. كم يساوي طول ضلعها؟ وداخل هذه الحديقة حوض للأسماك مساحته $2m^2$. كم يساوي طول ضلع الحوض ؟ 1) – تعريف : العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a يسمى : جذر مربع العدد a و يكتب : $\sqrt{a}$. * بتعبير اخر : a عدد حقيقي موجب و b عدد حقيقي موجب. $b=\sqrt{a}$ يعني أن $a=b^2$	تمرين2 أحسب ما يلي : $a=(\sqrt{2}^2)^3$;; $b=\left[\left(-\sqrt{5}\right)^2\right]^{-2}$;; $c=\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-4}$;; $d=\sqrt{3}\times(2\sqrt{3})^3$ $e=2\sqrt{45}\times\sqrt{80}$;; $f=\sqrt{11}\times(\sqrt{11})^2\times(\sqrt{11})^{-3}$;; $g=(2\sqrt{7})^2\times(3\sqrt{7})^2\times(-5\sqrt{7})^2$

ثانوية أفورار الإعدادية

2) – نتيجة :

مهما كان a عددا حقيقيا موجبا فإن :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a}^2 = a$$

* تطبيقات:

$$\sqrt{0} = 0 \quad ;; \quad \sqrt{3}^2 = 3 \quad ;; \quad \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

$$\sqrt{1} = 1 \quad ;; \quad \sqrt{16} = \sqrt{4}^2 = 4 \quad ;; \quad \sqrt{(-7)^2} = 7$$

$$\sqrt{\frac{100}{9}} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{10}{3} \quad ;; \quad \sqrt{1.21} = \sqrt{(1,1)^2} = 1,1$$

II _ العمليات على الجذور المربعة :

* نشاط تمهيدي

مستعملا الآلة الحاسبة ، قارن مايلي :

$\sqrt{4}\times\sqrt{9}$ و $\sqrt{4\times 9}$ ثم $\sqrt{3}\times\sqrt{9}$ و $\sqrt{3\times 9}$ ثم $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$ و $\sqrt{2\times 8}$ ثم $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$ و $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ثم $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ و $\sqrt{\frac{2}{8}}$

بصفة عامة :

$$h = \frac{(2\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}-1} + \frac{(-\sqrt{3})^4}{\sqrt{3}+1}$$

تمرين 3

بسط كتابة ما يلي :

$$a = \sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27} \quad ;;$$

$$b = 2\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80} \quad ;;$$

$$c = 3\sqrt{6} + 4\sqrt{24} - \frac{1}{2}\sqrt{54}$$

$$d = \sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{8}{27}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{50}{12}}$$

تمرين 4

a و b عددان حقيقيان بحيث :

ثانوية أفورار الإعدادية

1) الجذر المربع و الجداء.

أ) خاصية 1

a و b عددان حقيقيان موجبان .

$$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

ب) نتيجة :

a و b عددان حقيقيان موجبان : $\sqrt{a^2\times b}=\sqrt{a}^2\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

ج) تطبيق

$a=3+\sqrt{5}$ و $b=3-\sqrt{5}$

أحسب ما يلي :

$\frac{b}{a}$ و $\frac{a}{b}$ و ab و b^2 و a^2

و

$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ و $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

تمرين5

a و b و c أعداد حقيقية موجبة.

أكتب ما يلي بدون استعمال رمز الجذر المربع :

$a=\sqrt{36a^2b^2}$;; $b=\frac{1}{2}\sqrt{4(ac)^4}$;;

ثانوية أفورار الإعدادية

1- بسط الكتابات التالية :

$$A=\sqrt{3}\times\sqrt{27}$$
$$B=\sqrt{80}\times\sqrt{5}$$
$$C=\sqrt{2}\times\sqrt{4}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}$$

2- استنتج حساب مايلي:

$$A-B-C$$
$$-A-B-C$$

2) الجذر المرع و الخارج.

أ) خاصية

a و b عددان حقيقيان موجبان و $b\neq 0$.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

ب) تطبيقات

1- بسط مايلي :

$$c=3\sqrt{9a^2}\times(5\sqrt{2b})^2\times 2\sqrt{25c^4}$$
$$d=2\sqrt{a^2}+5\sqrt{b^2}-3\sqrt{c^2}+4(a-b+c)$$

تمرين6

أحسب وبسط ما يلي :

$$A=-3\sqrt{45}+2\sqrt{80}-\frac{3}{2}\sqrt{20} \quad ;;$$
$$B=\sqrt{2\sqrt{7}-3}\times\sqrt{2\sqrt{7}+3} \quad ;;$$
$$C=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{15}}\times\sqrt{\frac{5}{24}}$$

ثانوية أفورار الإعدادية

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$$

2- أحسب مايلي :

$$A = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{25}{9}} - \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$$

على دفتر التمارين

تمرين 1

أحسب مايلي دون استعمال الآلة الحاسبة:

$$A = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \qquad B = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \qquad C = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \qquad D = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$$

III _ **حذف الجذر المربع من المقام** :

$$D = 2\sqrt{12} + \frac{1}{4}\sqrt{48} - \sqrt{27} \quad ;;$$

$$E = -\frac{1}{7}\sqrt{14} \times \sqrt{\frac{7}{2}} \quad ;;$$

$$F = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$G = \sqrt{18} + \sqrt{98} + \sqrt{200} \quad ;;$$

$$H = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{48}{5}} - \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{3}{20}} \quad ;;$$

$$I = \frac{1}{7-5\sqrt{2}} - \frac{1}{7+5\sqrt{2}}$$

ثانوية أفورار الإعدادية

تذكير : لنعتبر الكتابة الكسرية التالية $\frac{a}{b}$ و k عدد حقيقي يخالف صفر

$$\frac{a}{b}=\frac{ka}{kb}$$

1) – الحالة الأولى :

* لنحذف الجذر المربع من مقام العدد : $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

لدينا : $\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

* لنحذف الجذر الربع من مقام العدد : $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$.

لدينا : $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3\times 2}}{5\sqrt{2}^2}=\frac{\sqrt{6}}{5\times 2}=\frac{\sqrt{6}}{10}$

ثانوية أفورار الإعدادية

* لنحذف الجذر المربع من مقام العدد : $\frac{2+\sqrt{5}}{7\sqrt{3}}$.

لدينا :

$$\frac{2+\sqrt{5}}{7\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\times\sqrt{3}}{7\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{7\sqrt{3}^{2}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5\times 3}}{73}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{21}$$

2) – الحالة الثانية : استعمال المرافق. (مرافق (a+b) هو (a-b)و مرافق (a-b) هو (a+b))

* لنحذف الجر المربع من مقام العدد : $\frac{2}{1-\sqrt{5}}$

لدينا :

$$\frac{2}{1-\sqrt{5}}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{1^{2}-\sqrt{5}^{2}}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{1-5}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{-4}$$

ملاحظة : مرافق العدد $\left(1-\sqrt{5}\right)$ هو العدد $\left(1+\sqrt{5}\right)$

ثانوية أفورار الإعدادية

IV _ **حـل المعادلة :** $x^2 = a$.

* نشاط تمهيدي

أوجد قيمة x في كل حالة مما يلي :

1) $x^2=4$

2) $x^2=0$

3) $x^2=-9$

1) – قاعدة :

إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لها حلين هما : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.

إذاكان $a = 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لها حـلا وحيدا هو العدد 0.

إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ ليس لها حـلا .

2) – أمثلة :

* حل المعادلة : $x^2 - 9 = 0$.

ثانوية أفورار الإعدادية

لدينا : $x^2 = 9$

$x = \sqrt{9} = 3$ أو $x = -\sqrt{9} = -3$

إذن : هذه المعادلة تقبل حلين هما 3 و -3 .

* حل المعادلة : $x^2 + 11 = 0$.

لدينا : $x^2 = -11$ لا يمكن لأن المربع يكون دائما موجبا.

إذن : هذه المعادلة ليس لها حــلا.

* حل المعادلة : $x^2 = 0$.

ثانوية أفورار الإعدادية

لدينا : $x^2 = 0$ يعني أن $x = 0$. إذن هذه المعادلة تقبل حــلا وحيدا هو 0 .	

ثانوية أفورار الإعدادية

	عنوان الدرس : مبرهنة طاليس المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 12 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
*المستقيمات الموازية لأضلاع مثلث . *التناسبية .	*معرفة واستعمال المبرهنتين التاليتين في وضعيات مختلفة : ✓ ليكن (D_1) و(D_2) مستقيمان يتقاطعان في النقطة A . ولتكن النقطتان B وM من المستقيم (D_1) تختلفان عن النقطة A . ولتكن النقطتان C وN من المستقيم (D_2) تختلفان عن A. إذا كان المستقيمان (BC) و(MN) متوازيين فإن: $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$ ✓ ليكن (D_1) و(D_2) مستقيمان يتقاطعان في النقطة A . ولتكن النقطتان B وM من المستقيم (D_1) تختلفان عن النقطة A . ولتكن النقطتان C وN من المستقيم (D_2) تختلفان عن A.	*تعتبر خاصية طاليس من أهم نتائج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي خاصة والهندسة المستوية عامة . *من خلال أمثلة يتم التذكير بالخاصية التالية: ✓ المستقيم المار من منتصفي ضلعي مثلث يوازي حامل الضلع الثالث. ✓ في مثلث ABC إذا كان : $N\in[AC]$ و $M\in[AB]$ و $(MN)//(BC)$ فإن $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$. *تتيح مبرهنة طاليس فرصة أخرى للتمرس على التناسبية (إنشاء طول يكون رابعا متناسبا لثلاثة أطوال ، إنشاء طول يكون واسطا هندسيا لطولين) .

	إذا كان $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}$ وإذا كانت النقط AوBوM في نفس ترتيب النقط AوCوN . فإن (BC) و(MN) متوازيان .	أما المبرهنة العكسية فتقدم مع الأخ< بعين الإعتبار ترتيب النقط على شكل مستقيم . *تستغل بعض البرائم المعلوماتية أو شرائط الفيديو لتقريب خاصية طاليس وعكسيتها . * تستغل خاصية طاليس وعكسيتها في حل مسائل .

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
I _ مبرهنة طاليس المباشرة : 1) – تذكير : (D_1) و (D_2) مستقيمان متقاطعان في نقطة A.	تمرين 1 ABC مثلث بحيث : AB=3 و AC = 6 و BC = 5 . لتكن E نقطة من [AC] بحيث EC = 2 . الموازي للمستقيم (BC) و المار من E يقطع (AB) في F . (أنشئ شكل مناسب) 1) – بين أن : $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}$.

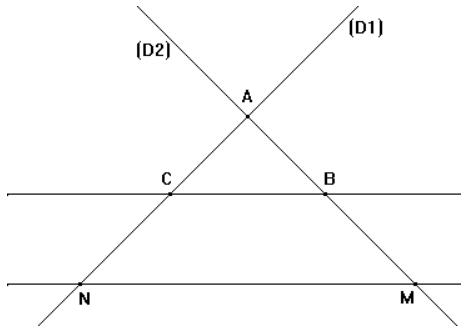
M و B نقطتان من المستقيم (D_2) تختلفان عن A

و

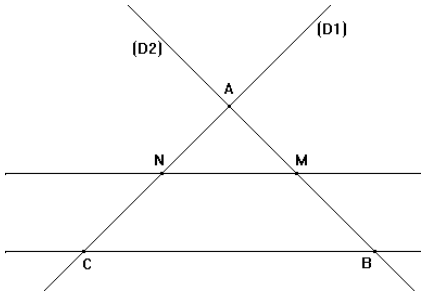
N و C نقطتان من المستقيم (D_1) تختلفان عن A

بحيث : (MN) // (BC) .

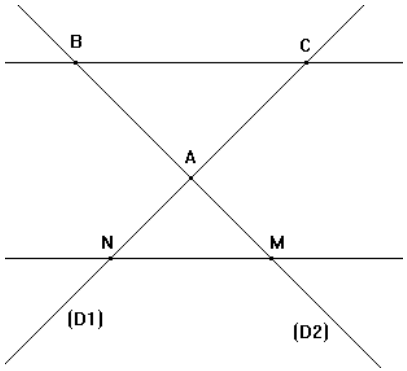
الحالة الأولى



الحالة الثانية



الحالة الثالثة



سيكون لدينا في جميع الحالات : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

2) – أحسب AF ثم BF .

3) – نعتبر النقطة H منتصف [BC] . المستقيم الموازي للمستقيم (AH) و المار من النقطة F يقطع المستقيم (BC) في النقطة N .

(أتم الشكل حيث M نقطة تقاطع (AH) و(EF))

قارن بين النسبتين : $\frac{AM}{AH}$ و $\frac{AF}{AB}$ ثم بين النسبتين : $\frac{AF}{AB}$ و $\frac{HN}{HB}$.

4) – استنتج أن : $\frac{AF}{AC}=\frac{AM}{AH}=\frac{HN}{HB}$.

تمرين 2

ABCD شبه منحرف قاعدتاه [AB] و[CD] بحيث : DC > AB , و E نقطة من [AD] بحيث : $\frac{AE}{DE}=\frac{1}{3}$.

الموازي للمستقيم (DC) والمار من النقطة E يقطع المستقيم (BC) في النقطة F .

1) – أحسب $\frac{FB}{FC}$.

ثانوية أفورار الإعدادية

2) – خاصية :

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين في نقطة A .

B و M نقطتان من المستقيم (D) تختلفان عن A .

C و N نقطتان من المستقيم (Δ) تختلفان عن A .

إذا كان : (MN) // (BC) فإن : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

2) – الموازي للمستقيم (AD) والمار من النقطة B يقطع المستقيم (DC) في النقطة H , و M نقطة من [HC]

بحيث : $\frac{MC}{MH}=3$. أحسب $\frac{MH}{MC}$.

3) – استنتج أن : (FM) // (AD) .

تمرين 3

ABCD رباعي محدب و E منتصف [AB] و F منتصف [BC] .

الموازي للمستقيم (AD) والمار من النقطة E يقطع المستقيم (BD) في النقطة I .

1) – قارن بين النسبتين : $\frac{IB}{ID}$ و $\frac{EB}{EA}$

2) – استنتج أن I منتصف [BD] .

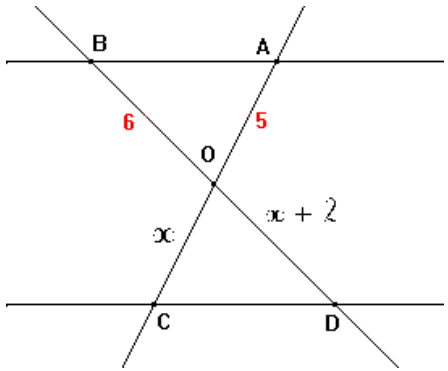
3) – برهن أن : (DC) // (IF) .

3) تمرين تطبيقي :

في الشكل أسفله لدينا :

(AB) // (CD) و $OB = 6$ و $OA = 5$ و $OC = x$ و $OD = x + 2$

أحسب x .



الحـل :

تمرين 4

ABC مثلث و [AM] متوسطه. لتكن O منتصف [AM]
المستقيم (OB) يقطع المستقيم (AC) في النقطة E .
الموازي للمستقيم (OB) و المار من النقطة M يقطع
المستقيم (AC) في النقطة N .

1) – أثبت أن : $\frac{AE}{AN} = \frac{AO}{AM}$ و أن :
$\frac{BM}{BC} = \frac{EN}{EC}$.

2) – بين أن E منتصف [AN] و أن N منتصف [EC]

3) – نعتبر F نقطة من [AB] بحيث : $\frac{AF}{AB} = \frac{1}{3}$.
بين أن (EF) // (BC)

تمرين 5

ABCD شبه منحرف قاعدتاه [AB] و [CD] بحيث :
BC = 6 و AD = 4 .

I نقطة من [BC] بحيث BI = 9 .

ثانوية أفورار الإعدادية

لدينا : (AC) و (BD) مستقيمان متقاطعان في O .

بما أن : (AB) // (CD)

فإن : $\frac{OB}{OD}=\frac{OA}{OC}=\frac{BA}{DC}$

إذن $\frac{OB}{OD}=\frac{OA}{OC}$ يعني أن : $\frac{6}{x+2}=\frac{5}{x}$

$$5(x+2)=6x$$
$$5x+10=6x$$
$$5x-6x=-10$$
$$-x=-10$$

و منه فإن : $x=10$

* ملاحظـات هـامة :

1) -- تستعمل خاصية طاليس المباشرة لحساب الأطوال.

J نقطة من [AD] بحيث AJ = 6 .

بين أن : (AB) // (IJ) .

تمرين 6

ABCD شبه منحرف قاعدتاه [AB] و [CD] .

(Δ) مستقيم يقطع [AD] و [BC] على التوالي في E و F .

إذا علمت أن : AE = 16 و FC = 25 و ED = BF

فاحسب : AD و BC .

تمرين 7

ABC مثلث .

E نقطة من [AB] بحيث : $AE=\frac{2}{3}AB$ و F

ثانوية أفورار الإعدادية

2) – يمكن تطبيق خاصية طاليس المباشرة على مثلث ABC باعتبار (AB) و(AC) :

مستقيمان يتقاطعان في A ثم M و N : نقطتان تنتميان على التوالي إلى (AB) و (AC)

بحيث : (MN) // (BC) .

و منه سيكون لدينا : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

II مبرهنة طاليس العكسية :

نشاط تمهيدي:

لنعتبر ABC مثلث في المستوى . M نقطة من المستقيم (AB) وNنقطة من المستقيم (AC) حيث : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

أنشئ شكل هندسي

حدد الوضع النسبي للمستقيمين (MN) و(BC) .

نقطة من [AC] بحيث : $CF=\frac{1}{3}CA$.

برهن أن : (BC) // (EF).

تمرين 8

ABC مثلث و $I\in[AB]$ و $J\in[AC]$.

المستقيم المار من I و الموازي للمستقيم (BJ) يقطع [AC] في النقطة N .

المستقيم المار من J و الموازي للمستقيم (IC) يقطع [AB] في النقطة M .

1) – قارن النسبتين : $\frac{AM}{AI}$ و $\frac{AJ}{AC}$ ثم

النسبتين : $\frac{AN}{AJ}$ و $\frac{AI}{AB}$.

2) – استنتج أن : $AB\times AN=AC\times AM$.

3) – بين أن : (MN) // (BC) .

ثانوية أفورار الإعدادية

1) – خاصية :

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين في نقطة A .

B و M نقطتان من المستقيم (D) تختلفان عن A .

C و N نقطتان من المستقيم (Δ) تختلفان عن A .

إذا كانت النقط A و M و B و النقط A و N و C في نفس الترتيب

تحقق : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ فإن : (MN) // (BC).

* ملاحظـات هـامة :

1) – عند تطبيق خاصية طاليس العكسية إنتبه إلى ترتيب النقط.

2) – تستعمل خاصية طاليس العكسية للبرهنة على التوازي.

تمرين 9

(C) نصف دائرة قطرها [EF] بحيث EF = 10 cm .

G نقطة من الدائرة (C) بحيث : EG = 9 و M نقطة من [EF] بحيث : EM = 8 .

(D) مستقيم يمر من النقطة M و عمودي على المستقيم (EG) في النقطة N .

1) – أثبت أن EFG مثلث قائم الزاوية .

2) – استنتج أن (MN) // (FG) .

3) – بين أن : $\frac{EN}{EG}=\frac{EM}{EF}$.

4) – استنتج قيمة النسبة $\frac{MN}{FG}$.

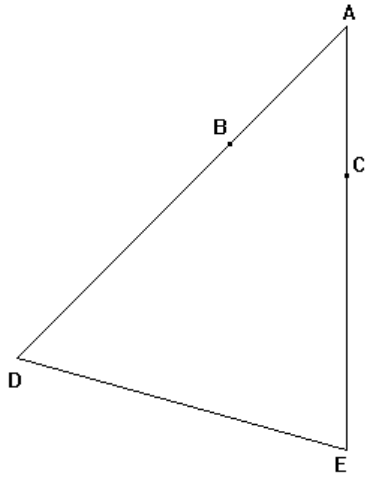
5) – أحسب : FG و EN و MN .

تمرين 10

متوازي الأضلاع و M نقطة من [AC] .

المستقيم الموازي للمستقيم (BC) والمار من النقطة M

3) تمرين تطبيقي :



لاحظ الشكـل جانبه بحيث :

AB = 3 و AC = 2,4

و AD = 8 و AE = 6,4

بين أن : (BC) // (DE)

الحـل :

لدينا : $\frac{AB}{AD}=\frac{3}{8}$ و $\frac{AC}{AE}=\frac{2,4}{6,4}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$

إذن : $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

* نعتبر المستقيمين (AB) و (AC) .

يقطع [AB] في النقطة N .

المستقيم الموازي للمستقيم (CD) و المار من النقطة M يقطع [AD] في النقطة P .

1) – أرسم شكـلا.

2) – قارن النسبتين $\frac{AN}{AB}$ و $\frac{AM}{AC}$ ثم النسبتين $\frac{AP}{AD}$ و $\frac{AM}{AC}$.

3) – بين أن : (PN) // (BD) .

ثانوية أفورار الإعدادية

	لدينا $\left.\begin{array}{l} D \in (AB) \\ E \in (AC) \end{array}\right\}$ بحيث النقط A وB وD و النقط A وC وE في نفس الترتيب و $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$. إذن : (BC) // (DE) (حسب خاصية طاليس العكسية)

ثانوية أفورار الإعدادية

مادة	عنوان الدرس : الترتيب والعمليات المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 12 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
*العمليات على الأعداد الجذرية *مقارنة عددين جذريين *استعمال القواعد المرتبطة بالترتيب والجمع *استعمال القواعد المرتبطة بالترتيب والضرب (ضرب طرفي متفاوتة في عدد موجب)	*التمكن من خاصيات الترتيب والعمليات واستعمالها فيحل مسائل *التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين واستعمال المناسب منها حسب الوضعية المدروسة .	*إن توظيف الترتيب في مقارنة بعض العمليات من التقنيات التي سبق للتلاميذ أن مارسوها سابقا ، لذا ينبغي الحرص على تثبيتها والسمو بها من خلال استعمال القواعد المرتبطة بالترتيب والعمليات . *تقبل جميع الخاصيات المتعلقة بالترتيب والعمليات وتوظف في تأطير وتقريب مجموع وفرق عددين جذريين معلومين وفي تأطير وتقريب جداء خارج عددين جذريين يكون كل منهما محصور بين عددين لهما نفس الإشارة وذلك من خلال مسائل متنوعة وبسيطة مستقاة من حقل الرياضيات ومن مواد أخرى دون إفراط.

ثانوية أفورار الإعدادية

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
***تساؤل** : إذا أخذنا عددين متساويين فإن الفرق بينهما يساوي صفر. أما إذا أخذنا عددين غير متساويين ، هل الفرق بينهما كذلك يساوي صفر ؟ إن كان لا ، فمتا يكون موجبا .ومتا يكون سالبا؟ I _ مقارنة عددين حقيقيين : 1) – قاعدة ① : a و b عددان حقيقيان . إذا كان $a-b\leq 0$ فإن $a\leq b$ إذا كان $a-b\geq 0$ فإن $a\geq b$ 2) تطبيق : 1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$ لدينا :	تمرين1 قارن بين ما يلي : $3\sqrt{11}$ و $2\sqrt{8}$,, $(1-\sqrt{2})$ و $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$,, $(5+\sqrt{2})$ و $(5+6\sqrt{5})$ $(11-2\sqrt{3})$ و $(15-2\sqrt{3})$

ثانوية أفورار الإعدادية

$$\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)=2\sqrt{2}-4-\sqrt{3}+5$$
$$=2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4$$
$$=\sqrt{3}+1$$

و بما أن : $\sqrt{3}+1\geq 0$ فإن : $\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)\geq 0$

و منه فإن : $2\sqrt{3}-4\geq\sqrt{3}-5$

2) -- لنقارن العددين : x و y بحيث : $x=y-3$.

لدينا : $x-y=-3$

و بما أن : $-3\leq 0$ فإن : $x-y\leq 0$.

و منه فإن : $x\leq y$

تمرين2

x عدد حقيقي بحيث : $-4\leq x\leq -2$.

1) – أثبت أن : $-6\leq x-2\leq -4$.

2) – بسط العدد : $\sqrt{(x-2)^2}$.

3) – اعط تأطيرا لما يلي : $\frac{1}{x+6}$

و $\frac{x^2}{x+6}$.

ثانوية أفورار الإعدادية

II الترتيب و العمليات :

1) – الترتيب و الجمع :

أ) الخاصية الأولى:

*نشاط تمهيدي

لنعتبر عددين حقيقين مختلفين ؛ الأول كبير والثاني صغير

إذا أضفنا لكل منهما نفس العدد ، فأي النتيجتين ستكون أكبر ؟

*خاصية1

a و b و c أعداد حقيقية .

إذا كان $a \leq b$ فإن $a+c \leq b+c$

إذا كان $a+c \leq b+c$ فإن $a \leq b$

* تطبيق :

نعتبر x عددا حقيقيا بحيث : $x < 3$.

لنقارن العددين $3+(-5)$ و $x+(-5)$.

تمرين3

a عدد حقيقي بحيث : $a \leq \frac{1}{2}$.

1) – بين أن : $2a - \frac{7}{3} \leq -\frac{4}{3}$.

2) – بسط العدد : $\sqrt{(2a-1)^2}$.

ثانوية أفورار الإعدادية

لدينا : $x < 3$

إذن :

أي
$$x + (-5) < 3 + (-5)$$
$$x - 5 < 3 - 5$$

و بالتالي فإن : $x - 5 < -2$

ب) الخاصية الثانية :

*نشاط تمهيدي

لنعتبر عددين حقيقيين متفاوتين ، وعددين أخريين متفاوتين .

إذا جمعنا بين العددين الصغيرين في المتفاوتتين ثم جمعنا بين العددين الكبيرين في المتفاوتتين

أي النتيجتين ستكون أصغر ؟ (أو أكبر) .

تمرين4

a و b و c أعداد حقيقية موجبة و غير منعدمة بحيث : $a \leq b$.

1) – أثبت أن : $\frac{a}{b+c} \leq \frac{b}{a+c}$.

2) – بين أن : $\frac{3a+2b}{b} \leq \frac{3b+2a}{a}$

.

ثانوية أفورار الإعدادية

*خاصية 2

a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases}$ فإن $a+c \le b+d$

* تطبيق:

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x<3$ و $2>y$.

لنبين أن : $x+y<5$.

لدينا : $\begin{cases} x<3 \\ 2>y \end{cases}$ يعني أن : $\begin{cases} x<3 \\ y<2 \end{cases}$

إذن : $x+y<2+3$

و باتالي فإن : $x+y<5$

2) – الترتيب و الضرب :

تمرين5

a و b عددان حقيقيان بحيث : $a \ge \frac{1}{2}$ و $b \ge \frac{1}{2}$.

بين أن :

$\frac{(a-b)^2}{2a} \le (a^2-b^2)^2$.

ثانوية أفورار الإعدادية

أ) -- خاصية ①

a و b و c أعداد حقيقية .

إذا كان $a \leq b$ و $c > 0$ فإن $a \times c \leq b \times c$

إذا كان $a \leq b$ و $c < 0$ فإن $a \times c \geq b \times c$

* تطبيق :

لدينا : $11 \leq 27$ و a عدد حقيقي سالب

لنبين أن 16a- عدد حقيقي موجب.

$11 \leq 27$ و a عدد حقيقي سالب

إذن: $11 \times a \geq 27 \times a$

وبالتالي : 11a-27a موجب

أي : a(11-27) موجب

إذن :16a- موجب

تمرين6

x و y عددان حقيقيان موجبان و غير منعدمين.

بين أن : $\frac{x+3y}{3x} \geq \frac{4y}{3y+x}$

.

ثانوية أفورار الإعدادية

ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة .

إذا كان $\left.\begin{array}{l} a \le b \\ c \le d \end{array}\right\}$ فإن $a \times c \le b \times d$

* تطبيق :

x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث : $x < \sqrt{3}$ و $y < 2\sqrt{6}$.

لنبين أن : $xy < 6\sqrt{3}$

لدينا :

و $\left.\begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array}\right\}$ يعني أن

$$x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$$
$$xy < 2\sqrt{3 \times 6}$$
$$xy < 2\sqrt{18}$$
$$xy < 2\sqrt{9 \times 2}$$
$$xy < 2\sqrt{3^2 \times 2}$$
$$xy < 2 \times 3\sqrt{2}$$

.

تمرين7

a و b عددان حقيقيان بحيث :

$a^2 - 2a - 3 \le 0$ و $\frac{1}{2} \le \frac{2}{-b+2} \le \frac{2}{3}$.

1) – أنشر $(a+1)(a-3)$.

2) – بين أن : $-1 \le a \le 3$

ثانوية أفورار الإعدادية

وبالتالي $xy < 6\sqrt{2}$ فإن :

3) – الترتيب و المقلوب :

أ) -- خاصية :

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا .

إذا كان $a \leq b$ فإن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

إذا كان $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ فإن $a \leq b$

ب) -- تطبيق :

لدينا : $5 \leq 9$ و $7 \leq 13$

و أن : $-2 \leq b \leq -1$.

3) – أطر العدد : $b(-a+3)$.

تمرين8

a و b عددان حقيقيان بحيث : $a > b$.

بين أن :

ثانوية أفورار الإعدادية

لنبين أن :

$$\frac{7}{9} \leq \frac{13}{5}$$

4) – الترتيب و المربع :

أ) -- خاصية ① :

a و b عددان حقيقيان موجبان .

إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$

إذا كان $a^2 \leq b^2$ فإن $a \leq b$

* تطبيق :

1- لدينا $5 \leq x$ حيث x عددحقيقي .

لنبين أن : $(5-x)(5+x) \leq 0$

2- لدينا $y^2 \leq 13$ حيث y عدد حقيقي موجب.

لنبين أن : $y \leq \sqrt{13}$

$5a > 4a + b$ و $5a > 3a + 2b$ و

$a > b - \frac{\sqrt{7}}{2}$ و $-7a + 4b < -3b$ و

$a\sqrt{2} + b > b\left(\sqrt{2}+1\right)$

تمرين9

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x < y$.

أثبت أن : $x < \frac{x+y}{2} < y$

ثانوية أفورار الإعدادية

ب) -- خاصية ② :

a و b عددان حقيقيان سالبان .

إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$

إذا كان $a^2 \geq b^2$ فإن $a \leq b$

* تطبيق :

1- لدينا $-5 \leq x$ حيث x عددحقيقي سالب .

لنبين أن : $(5-x)(5+x) \geq 0$

2- لدينا $y^2 \leq 13$ حيث y عدد حقيقي سالب.

لنبين أن : $y \geq -\sqrt{13}$

و أن : $x < \frac{2x+3y}{5} < y$

تمرين10

x و y عددان حقيقيان بحيث :

ثانوية أفورار الإعدادية

5) – الترتيب و الجذر المربع :

أ) -- خاصية :

a و b عددان حقيقيان موجبان .

إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ فإن $a \leq b$

* تطبيق:

1) – لنقارن العددين : $\sqrt{10}$ و $3\sqrt{3}$.

لدينا :

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{10}^2 = 10 \\ \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27\end{array}\right\}$$ و إذن $\sqrt{10}^2 \leq \left(3\sqrt{3}\right)^2$ و منه فإن $\sqrt{10} \leq 3\sqrt{3}$

$6 \leq x \leq 8$ و $-5 \leq y \leq -2$

أطر ما يلي :

أ) $x + y$

ب) $x - y$

ج) xy

د) $\frac{x}{y}$

ه) x^2

و) y^2

ز) $(x+y)^2$

ح) $(x-y)^2$

ط) $(x-y)(x+y)$

ثانوية أفورار الإعدادية

2) – لنقارن العددين : $-\sqrt{6}$ و $-3\sqrt{2}$.

لدينا :

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{6}^2 = 6 \\ \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18\end{array}\right\}$$ و إذن $\sqrt{6}^2 \leq \left(3\sqrt{2}\right)^2$ و منه فإن $\sqrt{6} \leq 3\sqrt{2}$. و بالتالي فإن :

$$-\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2}$$

ثانوية أفورار الإعدادية

III التأطيـر :

1) – تأطيـر مجموع عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

$x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$

سيكون لدينا : $x + z \leq a + b \leq y + t$

* تطبيق :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$

لنؤطر $x + y$.

لدينا :

$$3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2$$

إذن : $-1 \leq x + y \leq 10$

ثانوية أفورار الإعدادية

2) – تأطيــر مقابل عدد حقيقي :

a عدد حقيقي بحيث : $x \leq a \leq y$

سيكون لدينا : $-y \leq -a \leq -x$

3) – تأطيــر فرق عددين :

أعداد حقيقية بحيث : a و b و x و y و z و t

$x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$

سيكون لدينا: $x - t \leq a - b \leq y - z$

* ملاحظة هامة : لتأطير $a - b$ ، نضع : $a - b = a + (-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$

لنؤطر $x - y$.

ثانوية أفورار الإعدادية

لدينا :

$$-2 \le -y \le 4 \quad \text{و} \quad 3 \le x \le 8$$

إذن : $3-2 \le x+(-y) \le 8+4$

و منه فإن : $1 \le x-y \le 12$

4) – تأطيـر جـداء عددين :

أعداد حقيقية موجبة بحيث a و b و x و y و z و t :

$x \le a \le y$ و $z \le b \le t$

سيكون لدينا : $x \times z \le a \times b \le y \times t$

* مثال 1 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 7$ و $1 \le y \le 3$

ثانوية أفورار الإعدادية

لنؤطر $x \times y$.

لدينا :

$$3\times 1 \le x \times y \le 7\times 3$$

إذن : $3 \le x \times y \le 21$

* مثال 2 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $-5 \le x \le -2$ و $3 \le y \le 6$

لنؤطر $x \times y$.

لدينا :

$$2 \le -x \le 5$$

إذن :

$2\times 3 \le (-x)\times y \le 5\times 6$ أي $6 \le -xy \le 30$

و منه فإن : $-30 \le xy \le -6$.

ثانوية أفورار الإعدادية

5) – تأطيـر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

a و x و y أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث :

$$x \leq a \leq y$$

سيكون لدينا : $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$

6) – تأطيـر خارج عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث : $b \neq 0$ و $z \neq 0$ و $t \neq 0$

و $x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$

سيكون لدينا $\frac{x}{t} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{y}{z}$

* ملاحظة هامة : لتأطير $\frac{a}{b}$ ، نضع : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $5 \leq y \leq 9$

لنؤطر $\frac{x}{y}$.

لدينا :

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$$

إذن :

$$3 \times \frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7 \times \frac{1}{5}$$ أي $$\frac{3}{9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$

ثانوية أفورار الإعدادية

* تمرين محلول:

a و b و c أعداد حقيقية بحيث :

$6 \le a \le 8$ و $-4 \le b \le -2$ و $-3 \le c \le 5$

أطـر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

الحـل :

1) – تأطير a^2 .

لدينا : $6^2 \le a^2 \le 8^2$ و منه فإن : $36 \le a^2 \le 64$

2) – تأطير b^2 .

لدينا : $(-2)^2 \le b^2 \le (-4)^2$ و منه فإن : $4 \le b^2 \le 16$

3) – تأطير $a+2b-4c$.

لدينا : $-8 \le 2b \le -4$

و $-4 \times (-3) \le -4c \le -4 \times 5$ أي $12 \le -4c \le 20$

ثانوية أفورار الإعدادية

إذن : $6+(-8)+12 \le a+2b-4c \le 8+(-4)+20$

و منه فإن : $10 \le a+2b-4c \le 24$

4) – تأطير $\frac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6+(-4) \le a+b \le 8+(-2)$ أي $2 \le a+b \le 6$

و $\frac{1}{16} \le \frac{1}{b^2} \le \frac{1}{4}$

إذن : $2 \times \frac{1}{16} \le (a+b) \times \frac{1}{b^2} \le 6 \times \frac{1}{4}$ أي $\frac{2}{16} \le \frac{a+b}{b^2} \le \frac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{8} \le \frac{a+b}{b^2} \le \frac{3}{2}$

ثانوية أفورار الإعدادية

ملاحظات حول الخطة المتبعة	.....
	.....
	.....
	.....
	.....
	.....
	.....

ثانوية أفورار الإعدادية

	عنوان الدرس : المثلث القائم الزاوية المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 13 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
*جيب تمام التمام لزاوية حادة *مبرهنة فيتاغورس المباشرة *المثلث المتساوي الساقين وخصائصه، المثلث المتساوي الضلاع وخصائصه .	*معرفة واستعمال العلاقات بين جيب وجيب التمام وظل زاوية حادة وطولي ضلعين في مثلث قائم الزاوية. *استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة للنسب المثلية لزاوية حادة وعكسيا. *استعمال مبرهنة فيتاغورس وعكسيتها في الهندسة المستوية وفي بعض المضلعات المنتظمة. *مقارنة زاوية محيطية وزاوية مركزية تحصران نفس القوس في دائرة.	* يعتبر جيب التمام من مكتسبات التلاميذ بالسنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي، وبالتالي فإنه ينبغي تقديم جيب زاوية حادة وظل زاوية حادة اعتمادا على مكتسبات التلاميذ ثم يتم إثبات العلاقتين: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ حيث x هو قياس زاوية حادة بالدرجة. *تقديم واستعمال بعض العلاقات المترية من خلال تمارين دون أن تكون موضوع درس: إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في A وH المسقط العمودي للنقطة A على (BC)، فإن: AB.AC=BC.AH $AH^2=HB.HC$ $AB^2=HB.BC$ *ينبغي تطبيق علاقة فيتاغورس على الثلث القائم الزاوية والمثلث المتساوي الساقين والمثلث المتساوي

		الأضلاع في بعض الأطوال والنسب المثلية لزاوية حادة . *يمكن التطرق إلى بعض المضلعات المنتظمة من خلال تمارين.

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
# مبرهنة فيتاغورس **I مبرهنة فيتاغورس المباشرة :** 1) – خاصية : إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ملاحظة: إذا كان المثلث ABC غير قائم الزاوية في A فإن : $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$	تمرين 1 ABC مثلث قائم الزاوية في A . إذا علمت أن : $AB = 5\sqrt{2}$ و $BC = 3\sqrt{11}$ فاحسب AC . تمرين2 ABC مثلث بحيث : $AB = 2\sqrt{3}$ و $AC = \sqrt{13}$ و $BC = 5$. 1) – أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية. 2) – لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) . أحسب معللا جوابك : AH و BH و CH .

2) – تطبيقات:

ABC مثلث قائم الزاوية في C بحيث : $AC = 2\sqrt{2}$ و $AB = 10$.

لنحسب BC .

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في C فإن : $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة)

إذن :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 - AC^2 \\ &= 10^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 100 - 8 \\ &= 92 \end{aligned}$$

و منه فإن :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{92} \\ &= \sqrt{4 \times 23} \\ &= 2\sqrt{23} \end{aligned}$$

II _ مبرهنة فيتاغورس العكسية :

نشاط تمهيدي

لنعتبر ABC مثلث حيث : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

بين أن ABC مثلث قائم الزاوية في A

1) – خاصية :

إذا كان ABC مثلثا بحيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$

فإن : ABC قائم الزاوية في A .

2) – تطبيقات:

EFG مثلث بحيث : EF = 10 و FG = 8 و CG = 6

لنبين أن EFG مثلث قائم الزاوية .

لدينا :

$$EF^2 = 10^2 = 100$$
$$EG^2 = 6^2 = 36$$
$$FG^2 = 8^2 = 64$$

نلاحظ أن : $100 = 36 + 64$

أي : $EF^2 = EG^2 + FG^2$

وحسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن EFG مثلث قائم الزاوية في G .

III نتائج :

نشاط تمهيدي

ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

1- أنشئ شكل هندسي

2- بين أن :

$$\begin{cases} AB \times AC = AH \times BC \\ AH^2 = HB \times HC \\ AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times CB \end{cases}$$

نتيجة

إذاكان ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .

فإن

$$\begin{cases} AB \times AC = AH \times BC \\ AH^2 = HB \times HC \\ AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times CB \end{cases}$$

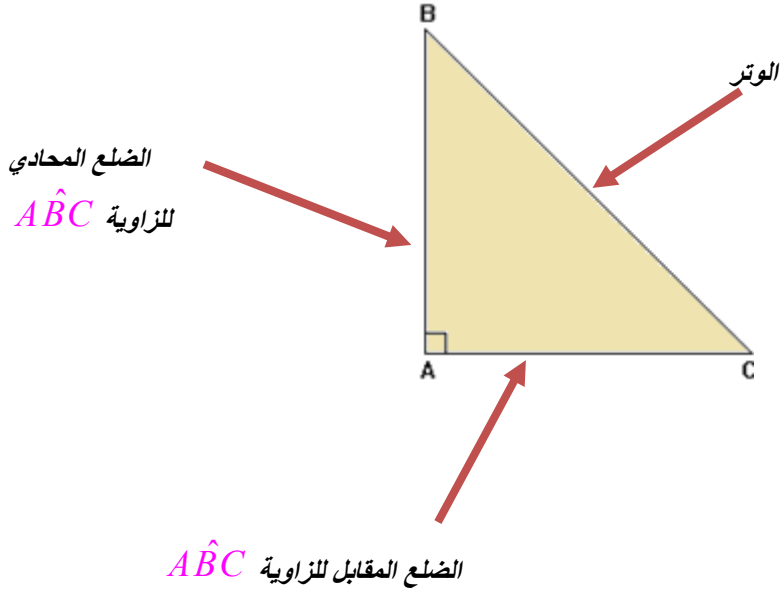
نسمي هذه العلاقات : العلاقات المترية في المثلث القائم الزاوية .

الحساب المثلثي

I _ النسب المثلثية لزاوية حادة :

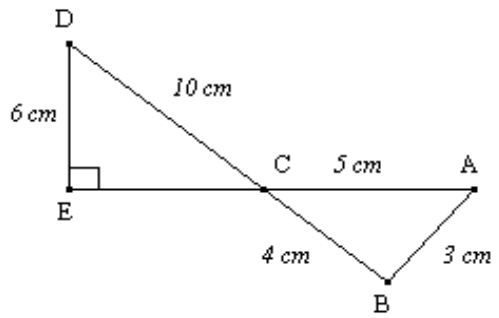
1) – تعاريف :

ABC مثلث قائم الزاوية في A



تمرين3

نعتبر الشكـل الآتي :



1) – بين أن : المثلث ABC قائم الزاوية.

2) – أثبت أن : $\cos E\hat{D}C = \frac{3}{5}$.

3) – استنتج حساب : $\sin E\hat{D}C$ و $\tan E\hat{D}C$.

أ) -- جيب تمام زاوية حادة :

النسبة $\frac{AB}{BC}$ تسمى جيب تمام الزاوية $A\hat{B}C$.

يرمز لها بالرمز $\cos A\hat{B}C$ و نقرأ cosinus $A\hat{B}C$

و نكتب : $\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$

أي $\cos A\hat{B}C = \frac{\text{طول الضلع المحادي}}{\text{طول لوتر}}$

ب) -- جيب زاوية حادة :

النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $A\hat{B}C$.

يرمز لها بالرمز $\sin A\hat{B}C$ و نقرأ sinus $\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$

و نكتب : $\sin A\hat{B}C = \frac{AC}{BC}$

أي $\sin A\hat{B}C = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول لوتر}}$

تمرين 4:

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :

BC = 5 cm و AB = 3 cm و AC = 4 cm

أحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{C}B$.

تمرين 5:

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث :

AC=4 و $\sin A\hat{B}C$ =0,625 أحسب BC و AB

ج) -- ظـل زاوية حادة :

النسبة $\frac{AC}{AB}$ تسمى ظـل الزاوية $A\hat{B}C$.

يرمز لها بالرمز $\tan A\hat{B}C$ و نقرأ $A\hat{B}C$ tangente

و نكتب : $\tan A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$

أي $\tan A\hat{B}C = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{الضلع المحادي}}$

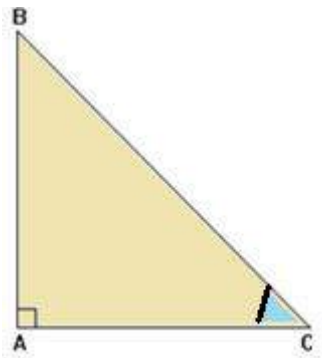
2) – مثال:

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :

AB = 3 cm و BC = 5 cm

و AC = 4 cm

لنحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{C}B$.



تمرين6 :

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث :

AC=3 و $\tan A\hat{B}C$ =0,75

أحسب BA و CB

تمرين7 :

AEF مثلث قائم الزاوية في A

حيث : AF=4 و AE=5

1- أحسب EF

2 - أحسب :

أ- النسب المثلثية للزاوية $[A\hat{F}E]$

ب- النسب المثلثية للزاوية $[A\hat{E}F]$

3- لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (EF).

أحسب HF و AH و EH.

أ) --- حساب $\cos A\hat{C}B$:

لدينا :

$$\cos A\hat{C}B = \frac{AC}{BC}$$

إذن :

$$\cos A\hat{C}B = \frac{4}{5}$$

ب) --- حساب $\sin A\hat{C}B$:

لدينا :

$$\sin A\hat{C}B = \frac{AB}{BC}$$

إذن :

$$\sin A\hat{C}B = \frac{3}{5}$$

ج) --- حساب : $\tan A\hat{C}B$

تمرين8 :

α قياس زاوية حادة

1- احسب $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ علما أن: $\cos\alpha = 0,2$

3- احسب $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ علما أن:

$$\tan\alpha = \sqrt{15}$$

4-

تمرين 9:

بسط مايلي: حيث α قياس زاوية حادة

$$a = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$$

$$b = \cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1$$

$$c = \cos^4\alpha + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$$

$$d = \frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha} - \frac{2}{\cos^2\alpha}$$

$$e = \sqrt{\cos\alpha + 1} \times \sqrt{1-\cos\alpha} \times \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$f = \frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$g = \left(\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}\right)\sqrt{1+2\cos\alpha.\sin\alpha} \times 2\left(1-\cos^2\alpha\right)$$

لدينا :

$$\tan A\hat{C}B = \frac{AB}{AC}$$

إذن :

$$\tan A\hat{C}B = \frac{3}{4}$$

II خصـائص :

نشاط تمهيدي

ليكن ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث : $\widehat{ACB} = \alpha°$ و $\widehat{ABC} = \beta°$

1- بين أن $0 < \sin\alpha < 1$ و $0 < \cos\alpha < 1$

2- بين أن $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

3- بين أن $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4- بين أن $\alpha + \beta = 90°$ ثم

$$\cos\alpha = \sin\beta$$
$$\sin\alpha = \cos\beta$$
$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$$

تمرين10 :

1- α قياس زاوية حادة .

بين أن : $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$

و أن : $\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

2- احسب : $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ علما أن:

$$\tan\alpha = 4\sqrt{3}$$

تمرين 11:

1ـ باستعمال الآلة الحاسبة حدد $\sin 30°$

1ـ استنتج : $\cos 30°$ و $\tan 30°$

2ـ أستنتج النسب المثلثية للقياس $60°$

تمرين 12:

بسط مايلي:

$$e = \cos 25° + \cos 70° - \sin 65° + \sin 20°$$

$$f = \sin 80° + 7\sin^2 50 - \cos 10° + 7\sin^2 40°$$

1) – الخاصية الأولى :

مهما كان α قياس زاوية حادة $(0° < \alpha < 90°)$

فإن : $0 < \cos\alpha < 1$ و $0 < \sin\alpha < 1$

2) – الخاصية الثانية :

مهما كان α قياس زاوية حادة $(0° < \alpha < 90°)$

فإن : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

3) – الخاصية الثالثة :

مهما كان α قياس زاوية حادة $(0° < \alpha < 90°)$

فإن : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4) – الخاصية الرابعة : النسب المثلثية لزاويتين متتامتين .

α و β قياسي زاويتن حادتين بحيث : $\alpha + \beta = 90°$

$\cos\alpha = \sin\beta$

$\cos\beta = \sin\alpha$

$\tan\beta = 1/\tan\alpha$

$\tan\alpha = 1/\tan\beta$

5) – النسب المثلثية لزوايا خاصة :

نشاط تمهيدي:

ليكن ABC مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A (أنشئ شكل هندسي)

1- أحسب :sin45° واستنتج cos45° وtan45°

2- لتكن D نقطة حيث BCD مثلث متساوي الأضلاع و A خارجه . H المسقط العمودي لDعلى (BC) (أتمم الشكل)

أ) أحسب : sin30° و cos30° وtan30°

ب) استنتج :sin60° وcos60° وtan60°

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

III) طريقة استعمال الآلة الحاسبة:

1- تحديد النسب المثلثية لزاوية حادة.

لتحديد النسب المثلية لزاوية حادة نتبع الخطوات التالية: إتباع السهم

x → sin → =

x → cos → =

x → tan → =

2- تحديد قياس زاوية حادة انطلاقا من إحدى نسبها المثلثية.

- لتحديد زاوية حادة x تحقق $\cos x = a$ أو $\sin x = a$ حيث $0 \leq a \leq 1$

نتبع الخطوات التالية :

a → shift → Cos^{-1} → =

- a → shift → Sin^{-1} → =

لتحديد زاوية حادة x أو قيمة مقربة لها باستعمال الآلة الحاسبة

تحقق $\tan x = a$ حيث عدد حقيقي أكبر قطعا من 0 .

نتبع الخطوات التالية :

a → shift → tan^{-1} → =

الزاوية المحيطية والزاوية المركزية

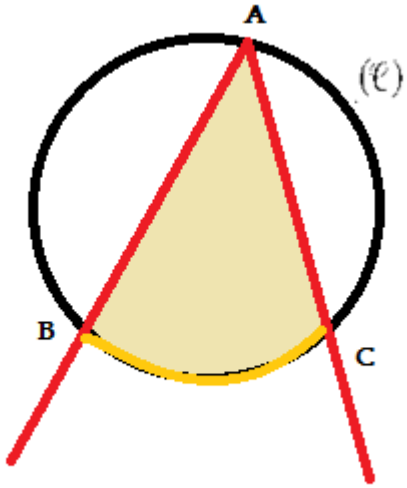
I الزاوية المحيطية :

1) – تعريف :

الزاوية المحيطية هي كل زاوية رأسها ينتمي إلى دارة

و ضلعاها يقطعان الدائرة

2) – شكل توضيحي :



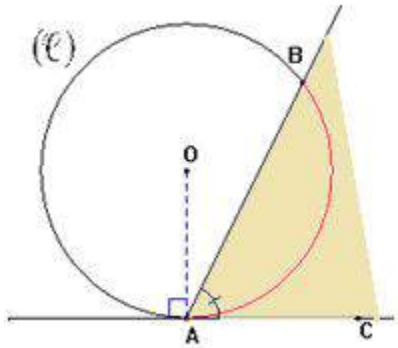
نعتبر الشكـل جانبه :

نقول : الزاوية $B\hat{A}C$ زاوية محيطية.

نقول كذلك : $B\hat{A}C$ زاوية محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{BC}$.

3) – حالة خاصة :

لاحظ الشكـل التالي بحيث المستقيم (AC) مماس للدئرة في النقطة A .



نقول : الزاوية $B\hat{A}C$ زاوية محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.

II الزاوية المركزية :

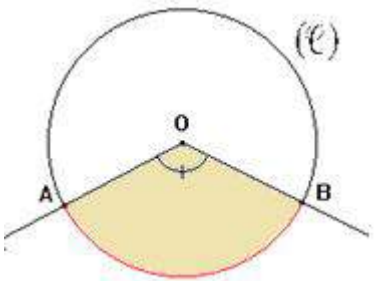
1) – تعريف :

الزاوية المركزية هي كل زاوية رأسها مركز دارة

و ضلعاها يقطعان الدائرة

2) – شكل توضيحي :

نعتبر الشكـل التالي :



نقول : الزاوية $A\hat{O}B$ زاوية مركزية.

نقول كذلك : الزاوية $A\hat{O}B$ زاوية مركزية تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.

III _ خصـائص : كل الخصائص يبرهن عنها

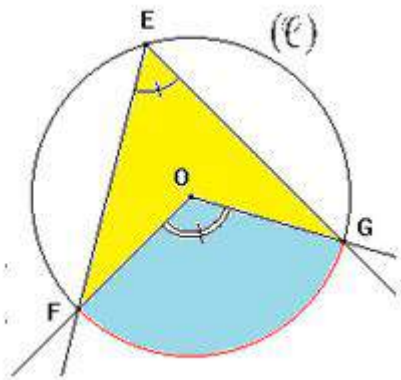
1) – ملاحظة :

تكون زاوية مركزية مرتبطة بزاوية محيطية

إذا كانتا تحصران نفس القـوس

* شكل توضيحي :

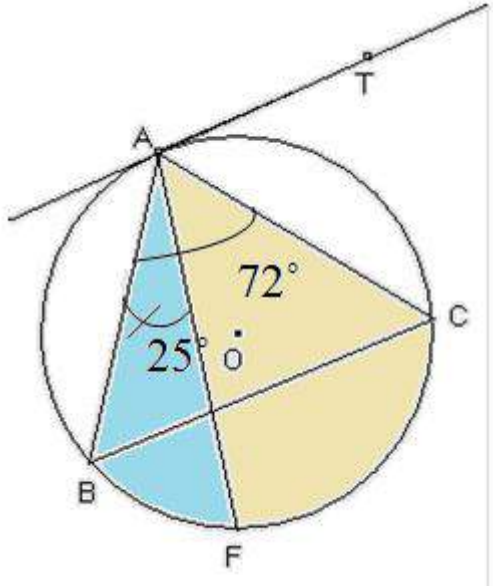
لاحظ الشكـل جانبه :



تمرين13

نعتبر الشكل أسفله حيث ABC مثلث متساوي الساقين في A ومحاط بالدائرة و (AT) مماس لهذه الدائرة.

و $B\hat{A}C = 72^\circ$ و $B\hat{A}F = 25^\circ$



أحسب: $B\hat{C}F$ ، $F\hat{O}C$ ، $A\hat{B}C$ و $C\hat{A}T$.

نقول : الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $F\hat{E}G$ هي الزاوية $F\hat{O}G$

لأنهما تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{FG}$

سؤال 1: هل الزاوية المحيطية والزاوية المركزية المرتبطة بها متقايستان ؟ وضح ذالك .

سؤال 2: قارن قياسي زاويتين محيطيتين تحصران نفس القوس .

2) – الخـاصية الاولى :

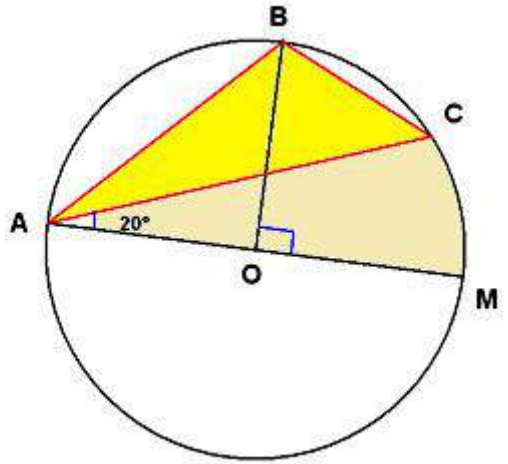
قياس زاوية محيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المرتبطة بها

* شكل توضيحي :

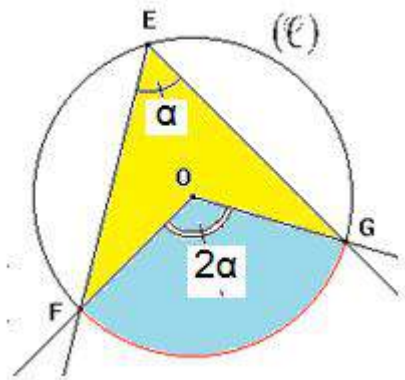
لاحظ الشكـل أسفله :

تمرين14

نعتبر الشكل التالي (O مركز الدائرة)



أحسب قياسات زوايا المثلث ABC



لدينا : $F\hat{E}G$ زاوية محيطية و $F\hat{O}G$ الزاوية المركزية المرتبطة بها.

إذن : $F\hat{E}G = \frac{1}{2}F\hat{O}G$

3) – الخـاصية الثانية :

زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

تكونان مقايستين

* مثال :

لاحظ الشكـل التالي :

تمرين15

(C) دائرة مركزها O وشعاعها 3،

و ABF مثلث محاط بها حيث : $B\hat{A}F = 40^\circ$

ولتكن H النقطة المتقابلة قطريا مع F

في الدائرة(C).

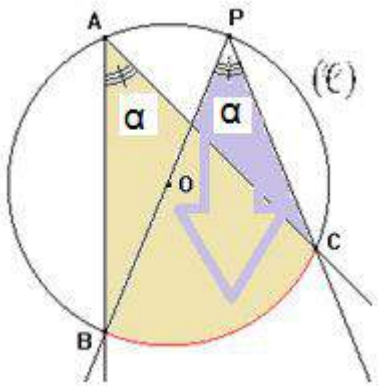
1- أنشئ الشكل.

2- أحسب $B\hat{H}F$

3- استنتج أن : $BF = 6\sin 40^\circ$

4- نعطي $\sin(40^\circ) \approx 0,65$

أحسب BF



لدينا : $B\hat{A}C$ و $B\hat{P}C$ زاويتان محيطيتان تحصران

نفس القوس $\overset{\frown}{BC}$

إذن : $B\hat{A}C = B\hat{P}C$

	عنوان الدرس : المثلثات المتقايسة-المثلثات المتشابهة المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 12 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

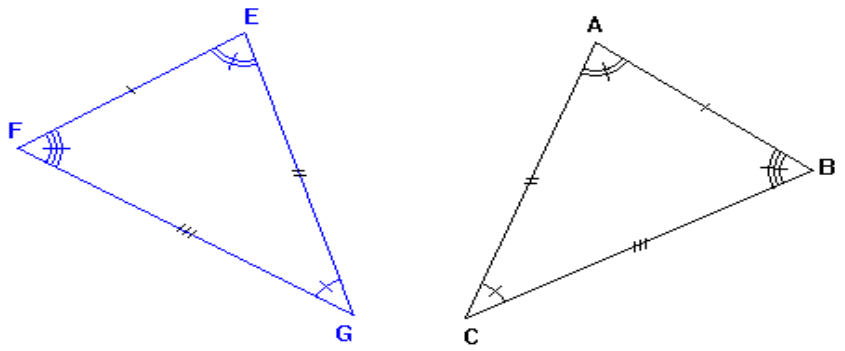
المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
*قياس الزوايا. *مقارنة الزوايا بكل أنواعها. *المثلثات الخاصة وخصائصها. *التناسب.	*التعرف على مثلين متقايسين. *استعمال حالات التشابه.	*نقول إن مثلثين متقايسين إذا كانا قابلين للتطابق. *يمكن قبول حالات التقايس الثلاث من خلال استعمال الأنسوخ أو باستعمال أي تقنية أخرى مناسبة ويمكن البرهنة عليها إذا سمح مستوى التلاميذ بذلك. *نقول إن مثلثين متشابهين إذا كانت أضلاع احدهما متناسبة على التوالي مع أضلاع المثلث الآخر. *يمكن تقديم حالات التشابه اعتمادا على تقايس المثلثات ثم توظيف هذه الخاصيات في حل تمارين بسيطة.

ثانوية أفورار الإعدادية

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
المثلثات المتقايسة **I مثلثان متقايسان :** 1) – تعريف : مثلثان متقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق	تمرين 1 ABCD مستطيل مركزه O . لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BD) و I المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (AC) 1) – أرسم شكـلا. 2) – بين أن المثلثين OBI و OAH متقايسان.

2) – مثـال :

ABC و EFG مثلثان متقايسان .



الضلعان [EF] و [AB] يسميان ضلعان متناظران .

و كذلك الضلعان [EG] و [AC] و الضلعان [FG] و [BC] .

الزاويتان $F\hat{E}G$ و $B\hat{A}C$ تسميان زاويتان متناظرتان .

و كذلك الزاويتان $E\hat{F}G$ و $A\hat{B}C$ و الزاويتان $E\hat{G}F$ و $A\hat{C}B$.

تمرين 2

ABC مثلث محاط بدائرة (C) مركزها O و شعاعها يخالف صفر .

(Δ) مماس للدائرة في النقطة A .
المستقيم المار من B و الموازي للمستقيم (Δ) يقطع المستقيم (AC) في النقطة D .

1) – أرسم شكـلا.

2) – أثبت أن المثلثين ABC و ADB متشابهان.

3) – استنتج أن : $AB^2 = AD \times AC$.

ثانوية أفورار الإعدادية

3) – خـاصيــة :

كان مثلثان متقايسين فإن أضلاعهما المتناظرة متقايسة وزواياهما المتناظرة متقايسة

سيكون لدينا في المثال أعلاه :

$$AB = EF \quad و \quad AC = EG \quad و \quad BC = FG$$

$$A\hat{B}C = E\hat{F}G \quad و \quad A\hat{C}B = E\hat{G}F \quad و \quad A\hat{C}B = E\hat{G}F$$

II حالات التقايس :

1 – الحالة الأولى :

* مثال :

نعتبر ABC و EFG مثلثين بحيث : AB = EF و AC = EG و BC = FG

تمرين 3

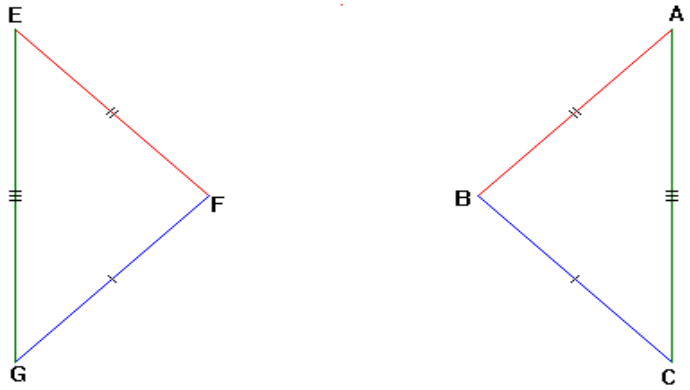
ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A ومحاط بدائرة (C مركزها O و شعاعها r) .

المستقيم العمودي على المستقيم (BC) و المار من النقطة A يقطع [BC] في النقطة M .

لتكن E نقطة من نصف المستقيم [AM) بحيث :

AM = ME .

1) – أرسم شكـلا.



باستعمال الأنسوخ :سنلاحظ أن ABC و EFG قابلين للتطابق

إذن : المثلثين ABC و EFG متقايســان .

* خاصية :

إذا قايست أضلاع مثلث على التوالي أضلاع مثلث آخر
فإن هذين المثلثين متقايســان

2) – الحالة الثانية :

2) – بين أن المثلثين AMC و EMB متقايسان.

3) – أنشئ القطر [BF] للدائرة (C) ثم بين أن المثلثين AFB و MCA متشابهان

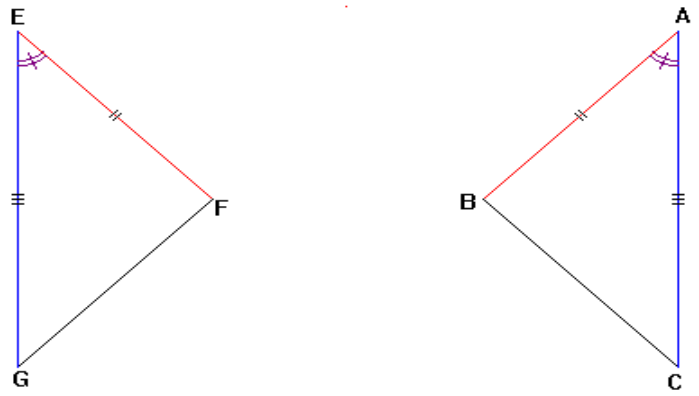
تمرين 4

ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث : AB = 4 cm .

ثانوية أفورار الإعدادية

* مثال :

نعتبر ABC و EFG مثلثين بحيث : AB = EF و AC = EG و $B\hat{A}C = F\hat{E}G$



باستعمال الأنسوخ :سنلاحظ أن ABC و EFG قابلين للتطابق

إذن : المثلثين ABC و EFG متقايســان .

* خاصية :

إذا قايس ضلعان في مثلث و الزاوية المحصورة بينهما على التوالي ضلعان في مثلث آخر و الزاوية المحصورة بينهما فإن هذين المثلثين متقايســان

I منتصف [AC] و J المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (BI) .

المستقيمان (CJ) و(AB) يتقاطعان في النقطة K .

1) – أرسم شكــلا.

2) – بين أن المثلثين ABI و JCI متشابهان.

3) – استنتج أن : $AB \times CI = JC \times BI$.

4) – بين أن المثلثين ABI و ACK متقايسان.

5) – أحسب : BI و JC .

تمرين 5

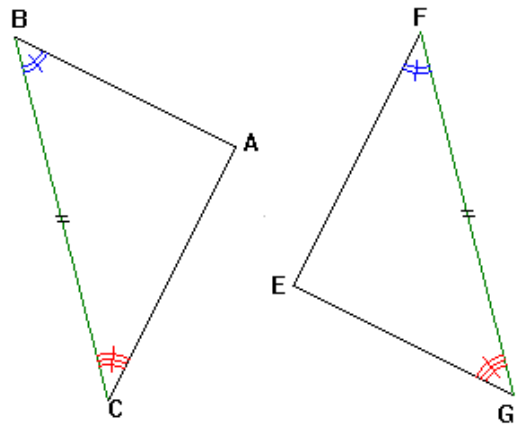
ABCD مربع مركزه O .

لتكن M نقطة من [AB] تختلف عن A و B . المستقيم العمودي على المستقيم (DM)

3) – الحالة الثالثة :

* مثال :

نعتبر ABC و EFG مثلثين بحيث : $A\hat{B}C = E\hat{F}G$ و $A\hat{C}B = E\hat{G}F$ و $BC = FG$



باستعمال الأنسوخ :سنلاحظ أن ABC و EFG قابلين للتطابق

إذن : المثلثين ABC و EFG متقايســان .

والمار من النقطة A يقطع (DM) في النقطة I و يقطع المستقيم (BC) في النقطة P .

1) – أرسم شكــلا.

2) – بين أن المثلثين ADM و IAM متشابهان.

3) --- أ) -- بين أن المثلثين ADM و BAP متقايسان.

ب) -- استنتج أن : AM = BP و أن : AP = DM .

4) --- أ) -- بين أن المثلثين OAM و OBP متقايسان.

ب) -- استنتج أن المثلث OPM متساوي الساقين و قائم الزاوية.

* خاصية :

إذا قايست زوايتان لمثلث و الضلع المحاذي لهما على التوالي زوايتان لمثلث آخر و الضلع المحاذي لهما فإن هذين المثلثين متقايســـان

III – تطبيقات:

تمرين 1

ABCD متوازي الأضلاع مركزه O .

1) – أرسم شكــلا.

2) – بين أن المثلثين AOB و COD متقايسان.

3) – قارن المثلثين : ADB و CBD .

تمرين 2

ABCD مستطيل بحيث : AB = 6 cm و B C = 4 cm.

M و N نقطتان من [AB]تحققان : $AM = \frac{1}{3}AB$ و $AN = \frac{2}{3}AB$.

1) – أرسم شكــلا.

2) – بين أن المثلثين BMC و AND متقايسان.

ثانوية أفورار الإعدادية

تمرين 3

ABCD رباعي دائري و محدب بحيث : AB = CD و (AC) و (BD) يتقاطعان في I .

1) – أرسم شكــلا.

2) – أثبت أن المثلثين ABI و IDC متقايسان.

ثانوية أفورار الإعدادية

المثلثات المتشابهة

I _ مثلثان متشابهان :

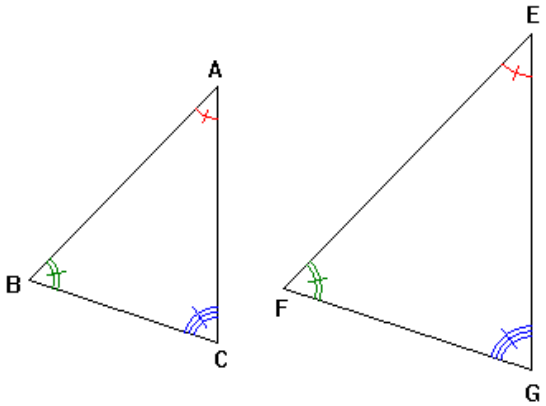
1) – تعريف :

يكون مثلثان متشابهين إذا قايست زوايا أحدهما على التوالي زوايا المثلث الآخر

2) – مثال :

(الشكـل جانبه) :EFG و ABCللمثلثين

$B\hat{A}C = F\hat{E}G$ و $A\hat{C}B = E\hat{G}F$ و $A\hat{B}C = E\hat{F}G$



* ملاحظات هامة :

1) – الضلعان [EF] و [AB] يسميان ضلعان متناظران .

و كذلك الضلعان [EG] و [AC] و الضلعان [FG] و [BC] .

الزاويتان $F\hat{E}G$ و $B\hat{A}C$ تسميان زاويتان متناظرتان .

و كذلك الزاويتان $E\hat{F}G$ و $A\hat{B}C$ و الزاويتان $E\hat{G}F$ و $A\hat{C}B$.

2) – مثلثان متقايسان هما مثلثان متشابهان .

3) – خاصية :

إذا كان مثلثان متشاهان فإن أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة

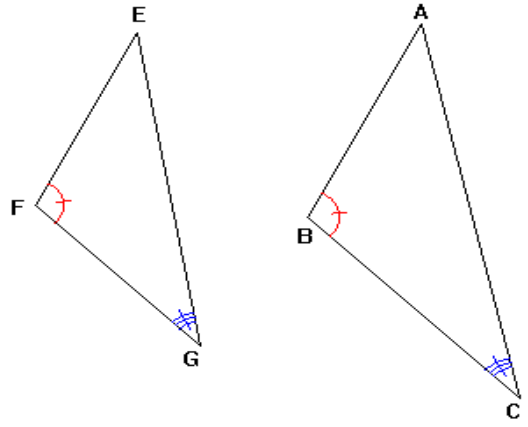
* بتعبير آخر :

إذا كان ABC و EFG مثلثين متشابهين فإن :

$$\frac{AB}{EF}=\frac{AC}{EG}=\frac{BC}{FG}$$

II _ حـالات التشـابه :

1) – الحالة الأولى :



* مثـال :

ABC و EFG مثلثان بحيث :

$A\hat{B}C = E\hat{F}G$ و $A\hat{C}B = E\hat{G}F$.

نعلم أن جموع قياسات زوايا مثلث يساوي 180°

ومنه $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$

إذن حسب التعريف :

المثلثين ABC و EFG متشابهان

ثانوية أفورار الإعدادية

* خــاصية :

إذا قايست زاويتان في مثلث على التوالي زاويتين

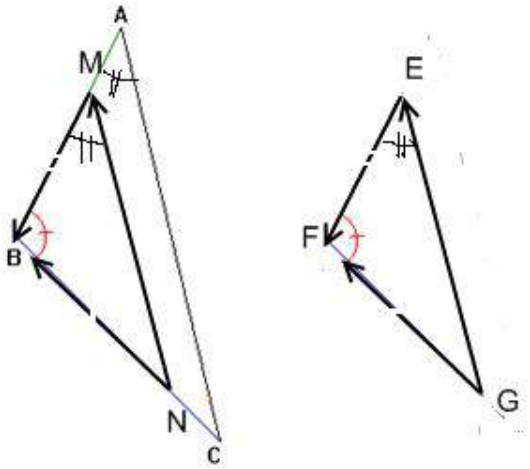
في مثلث آخـر فإن المثلثين متشابهان

* بتعبير آخر :

إذا كان ABC و EFG مثلثين بحيث :

$A\hat{B}C = E\hat{F}G$ و $A\hat{C}B = E\hat{G}F$ فإنهما متشابهان

2) – الحالة الثانية :



* مثــال :

ABC و EFG مثلثان بحيث :

$A\hat{B}C = E\hat{F}G$ و $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$.

لتكن Mنقطة من [AB] وN نقطة من [BC] حيث : BM=EFوBN=FG

من خلال خصائص متوازيان وقاطع سنجد $\widehat{BMN} = \widehat{BAC}$ وبالتالي $\widehat{FEG} = \widehat{BAC}$

ثانوية أفورار الإعدادية

ومنه

المثلثين ABC و EFG متشابهان

* خـاصية :

إذا قايست زاوية في مثلث زاوية في مثلث آخـر

وكانت أطوال الأضلاع المحادية للزاويتين متناسبة فإن المثلثين متشابهان

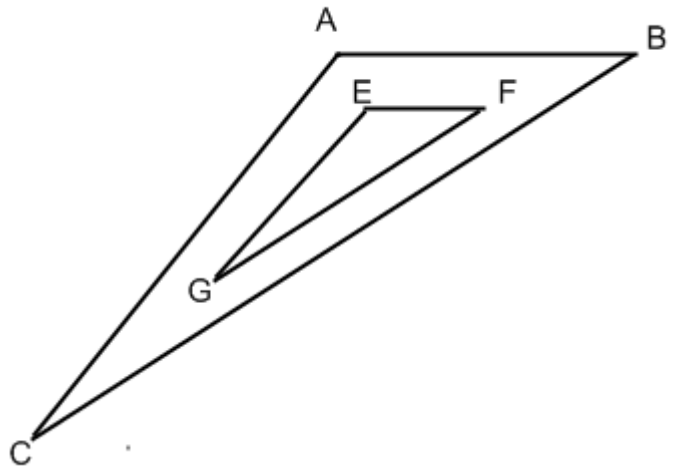
* بتعبير آخر :

إذا كان ABC و EFG مثلثين بحيث :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{FG} \text{ و } A\hat{B}C=E\hat{F}G$$

فإنهما متشابهان

3)– الحالة الثالثة :



* مثـال :

ABC و EFG مثلثان بحيث :

$$\frac{AB}{EF}=\frac{AC}{EG}=\frac{BC}{FG}=2$$

من خلال الشكل وحسب الأضلاع المتوازية مثنى مثنى

سنجد : لكل زاوية في المثلث ABC زاوية تقايسها في المثلث EFG

ثانوية أفورار الإعدادية

ومنه : المثلثين ABC و EFG متشابهان

* خـاصية :

إذا كانت أطوال أضلاع مثلث متناسبة مع أطوال أضلاع مثلث أخـــر فإن المثلثين متشابهان

* بتعبير آخر :

إذا كان ABC و EFG مثلثين بحيث :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{EG}=\frac{BC}{FG}$$ فإنهما متشابهان

III) تطبيقات

تمرين 1

ABC مثلث محاط بدائرة C(O ; r) و [AH] الارتفاع الموافق للضلع [BC] .

المستقيم (OA) يقطع الدائرة في النقطتين A و D .

1) – أرسم شكـلا.

2) – برهن أن المثلثين ACD و AHB متشابهان.

تمرين 2

ABC مثلث و E نقطة من نصف المستقيم [AB) .

الموازي للمستقيم (BC) و المار من النقطة E يقطع المستقيم (AC) في النقطة F .

ثانوية أفورار الإعدادية

	1) أنشئ الشكل 2) بين أن المثلثين ABC و AEF متشابهان. ترين 3 ليكن ABC مثلث حيث AB=3cm و AC= 4cm وBC=5cm EFG مثلث حيث : EF=8cm وEG=10cm وFG=6cm بين أن ABC و EFG مثلثان تشابهان ليكنل

ثانوية أفورار الإعدادية

	عنوان الدرس : المعادلات و المتراجحات المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 10 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
• المعادلات بالنسبة للأعداد الجذرية • النشر و التعميل • لترتيب	• --حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد. -- حل معادلات بسيطة تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد. -- حل مسائل تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد. -- حل متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد. -- توظيف المعادلة والمتراجحة في حل مسائل.	--يهدف حل المعادلات و المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد إلى تعويد التلاميذ على حل مسائل نابعة من الواقع المعيش وتدريبهم على ترييض وضعيات مختلفة وذلك ب : تحديد وتحليل المعطيات)لغويا و مفاهيميا (واختيار المجهول الملائم والبحث على الأدوات الرياضية الضرورية واستعمالها لحل المسألة المقترحة ثم تأويل النتائج المحصلة. -- يتم اكتشاف حل المتراجحات باستعمال الترتيب. -- تمثل حلول المتراجحة على مستقيم مدرج. -- تنبغي الحرص بهذا المستوى على تقديم حلول المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد مفصلة بجملة. -- تعتبر المعادلات البراميترية و المتراجحات البراميترية من الدرجة الأولى بمجهول واحد خارج المقرر. -- تعتبر جميع المسائل التي تؤول في حلها إلى حل معادلات أو متراجحات براميترية من الدرجة الأولى خارج المقرر.

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
I المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد : نشاط تمهيدي : عدد حقيقي ،مضاعفه إذا أظيف له 3 أصبحت النتيجة 0 لو رمزنا لهذا العدد الحقيقي المجهول بالحرف x ، لترجمت هذه المسألة إلى :..... 1) – تعريف : a و b و x أعداد حقيقية . كل متساوية على شكـل : $ax+b=0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x . 1) – مثال : كل من الكتابات :	تمرين1 حـل المعادلات الآتية : $2x=5$;; $3x+2=0$;; $-5x=-4$;; $-4x-1=0$;; $7x+2=3$;; $2x-1=-5$ $3x+2=x-1$;; $-4x-5=-3x$;; $7x=x+8$;; $-8x+6=-4$;; $2x+3=5x+2$ $x+3=x$;; $-2x+4=3-2x$;; $6-2x=-2x+6$;; $x-1=4x$;; $3x+11=2,5-4x$ تمرين2 حـل المعادلات الآتية : $3(1-x)=2x$;; $4(2x-1)=3x+5$;; $3+4(2x-5)=-2(1-x)$

$\sqrt{3}.x-\sqrt{2}=5$;; $2x+11=0$

$\frac{1}{2}x-5=-\frac{2}{3}$;; $-7-5x=1$

تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد و هو x .

2) – حل المعادلة $ax+b=0$:

* / بصفة عامة :

أ) -- إذا كان : $a\neq 0$ و $b\neq 0$ فإن : للمعادلة $ax+b=0$ حـلا وحيدا هو $\frac{-b}{a}$.

ب) -- إذا كان : $a\neq 0$ و $b=0$ فإن : للمعادلة $ax+b=0$ حـلا وحيدا هو العدد 0 .

ج) -- إذا كان : $a=0$ و $b=0$ فإن : للمعادلة $ax+b=0$ عدة حلول .

د) -- إذا كان : $a=0$ و $b\neq 0$ فإن : المعادلة $ax+b=0$ ليس لها حـلا .

* / تقنيات :

عند إزالة عدد من إحدى طرفي معادلة نضيف مقابله إلى الطرف الآخر

$5-3(x+4)+7x=0$;; $6x(1-x)=-3x(2x+2)-7$

;; $2(3x+3)-4(7-x)=5(x+2)$

$6(1-2x)+5(2x+8)-(2x-11)=0$

تمرين3

حـل المعادلات الآتية :

$\frac{3x+2}{6}-\frac{1}{2}=\frac{x+4}{3}-\frac{x}{2}$;; $2x-\frac{2x}{3}=\frac{x-1}{2}$;; $\frac{x}{2}-3=\frac{1}{4}$

;; $5x+\frac{x-1}{2}=\frac{3x+4}{5}-1$;; $\frac{x+3}{5}-\frac{1-x}{2}=0$

$\frac{6-x}{2}-\frac{7x}{3}=\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{6}$

;; $\frac{x}{5}-\frac{3x+1}{2}=2x+\frac{x}{2}$;; $2(x+1)-\frac{2x}{3}=\frac{1-x}{2}$

$\frac{1}{2}(x+4)-\frac{x-5}{4}=0$

* / أمثلة :

1) – حـل المعادلة : $2x+3=0$.

تكافئ على التوالي : $2x+3=0$ المعادلة

$$2x=-3$$
$$x=\frac{-3}{2}$$

2) – حـل المعادلة : $4x-5=4x-5$.

تكافئ على $4x-5=4x-5$ المعادلة التوالي

$$4x-4x=5-5$$
$$0x=0$$

إذن جميع الأعداد الحقيقية حـل للمعادلة $4x-5=4x-5$.

تمرين4

نعتبر المعادلات الآتية :

1) $2x-3(x+6)=4x+2(1-x)$

2) $6x-11=\frac{1+x}{2}-1$

3) $\frac{2x}{3}-\frac{x-3}{2}=\frac{3x-2}{6}$

4) $4x-3=2x-11$

من بين الأعداد الآتية أوجد حل كل معادلة من المعادلات أعلاه بدون إنجاز أي حـل لهذه المعادلات

$\frac{3}{2}$;; $\frac{20}{-3}$;; 1 ;; -2 ;; $\frac{21}{11}$;; 4

3) – حـل المعادلة : $x\sqrt{3}-7=0$.

تكافئ على التوالي : $x\sqrt{3}-7=0$ المعادلة

$$x\sqrt{3}=7$$
$$x=\frac{7}{\sqrt{3}}$$
$$x=\frac{7\sqrt{3}}{}$$

4) – حـل المعادلة : $5x+7=-2+5x$.

المعادلة $5x+7=-2+3x$

تكافئ على التوالي :

$$5x-5x=-2-7$$
$$0x=-9$$

إذن المعادلة $5x+7=-2+3x$ ليس لها حـل .

تمرين5

حل المعادلات الآتية :

$(x-1)(x+3)=0$;; $(x+2)(x-5)(1-x)=0$;;

$x(3x-5)(x-2)=0$

$x^2-x+(x-1)(3x+7)=0$;;

$(x+1)(x-3)-(x+1)(3x-1)=0$

$(3x-2)(x+1)=-3x+2$;; $25x^2-4=0$;; $16x-7=0$

$11x^2-25=0$;; $5x^2-2=0$;; $49x^2+28x+4=0$

$4x^2-9+(2x-3)(5x+1)=0$;;

$(3x-1)(x-5)+x^2-25=0$

$(x+2)(1-x)+x^2+4x+4=0$;; $25x^2-(3x+2)^2$

$4x^2-1+(2x+1)(3x-5)-(2x+1)=0$;;

$6x+4+(3x+2)(-1-x)=0$

$2x+2+5x(x+1)+(3x-2)(x+1)=0$;;

$5(2x+3)=(3x-4)(2x+3)$

5) – حـل المعادلة : $2x+2=3x+2$.

المعادلة $2x+2=3x+2$ تكافئ على التوالي :

$$2x-3x=2-2$$
$$2x-3x=0$$
$$-x=0$$
$$x=0$$

إذن العدد 0 هو حـل المعادلة $5x+7=-2+3x$

3) – حل المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$:

* / بصفة عامة :

a و b عددان حقيقيان معلومان .

حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$ هي حلول المعادلتين : $(ax+b)=0$ و $(cx+d)=0$

$$2x(5-x)-4x(5-x)=0 \quad ;; \quad (x-2)(x+1)-3x(x-2)+(x-2)=0$$

$$x^2-4-(x-2)=0 \quad ;; \quad 4x^2-9+3x(2x-3)+(2x+3)^2=0$$

$$2x^2-16+2\sqrt{2}.x-8=0 \quad ;; \quad 3x^2-2+\left(\sqrt{3}.x-\sqrt{2}\right)^2=0$$

تمرين6

حـل المعادلات الآتية :

$$\frac{x+1}{25}+\frac{2(3-x)}{5}=\frac{7-x}{10} \quad ;; \quad \sqrt{7}(x+1)-3\sqrt{7}=x-2 \quad ;;$$

$$\frac{x}{2}-\frac{x+1}{3}=\frac{2x-7}{6}$$

$$\frac{x+2}{3}-\frac{1-2x}{5}=\frac{7x+1}{15} \quad ;; \quad \sqrt{2}(1+x)+2\sqrt{\ }=x-1 \quad ;;$$

$$\frac{x+2}{3}+4=\frac{x}{2}-1$$

* / مثال :

حل المعادلة : $(2x+4)(-3x-5)=0$.

المعادلة $(2x+4)(-3x-5)=0$ تكافئ على التوالي :

$2x+4=0$ أو $-3x-5=0$

$2x=-4$ $\quad$ $-3x=5$

$x=\frac{-4}{2}$ $\quad$ $x=\frac{5}{-3}$

$x=-2$

إذن للمعادلة حلين هما : -2 و $\frac{5}{-3}$

4) – حل المعادلة $x^2=a$:

* / بصفة عامة :

* / إذا كان : $a>0$ فإن المعادلة $x^2=a$ تقبل حلين هما : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

* / إذا كان : $a=0$ فإن لمعادلة $x^2=a$ تقبل حلا وحيدا هو العدد 0 .

* / إذا كان : $a<0$ فإن المعادلة $x^2=a$ لا تقبل أي حل .

;; $\frac{2x-1}{2}-\frac{5}{3}x+\frac{6x+1}{6}=\frac{5x-4}{3}+2x+1$

$\frac{2x+3}{2}=x-\frac{1}{2}$;; $\sqrt{2}(x-1)=\sqrt{3}(x+2)$

;; $\frac{x+1}{\sqrt{2}}-1=x+5$;; $x(\sqrt{2}-3)+2(x-\sqrt{2})=0$

$\sqrt{7}.x-1=-x-\sqrt{7}$

تمرين7

حل المعادلات الآتية :

;; $81x^2-4=9x+2$;; $(2x-3)^2-(x-1)^2=x^2-4$

$(7x-1)^2=9x^2$

;; $(x\sqrt{7}-3)(3x-2)=(x\sqrt{7}-3)$

$(3x+\sqrt{7})(x-\sqrt{3})=(3x+\sqrt{7})(x-\sqrt{27})$

$(x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-x)(x-5)=0$

* / أمثلة :

1) – حل المعادلة : $x^2 = 5$.

سيكون لدينا : $x = \sqrt{5}$ أو $x = -\sqrt{5}$

إذن المعادلة $x^2 = 5$ تقبل حلين هما : $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$.

2) – حـل المعادلة : $2x^2 = -6$.

المعادلة $2x^2 = -6$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 = -\frac{6}{2}$$
$$x^2 = -3$$

إذن المعادلة $2x^2 = -6$ ليس لها حـل .

3) – حـل المعادلة : $2x^2 + 5 = x^2 + 5$.

المعادلة $2x^2+5=x^2+5$ تكافئ على التوالي :

$$2x^2-x^2=5-5$$
$$x^2=0$$
$$x=0$$

إذن للمعادلة $2x^2+5=x^2+5$ حــلا وحيدا هو العدد 0 .

5) – المعادلات و النشــر :

1) – حــل المعادلة : $2(3x+2)-5(x-1)=0$.

المعادلة $2(3x+2)-5(x-1)=0$ تكافئ على التوالي :

$$6x+4-5x+5=0$$
$$6x-5x=-4-5$$
$$x=-9$$

إذن العدد -9 هو حــل المعادلة $2(3x+2)-5(x-1)=0$.

2) – حــل المعادلة : $-3(2x+1)=x+2(-x-2)$.

المعادلة $-3(2x+1)=x+2(-x-2)$ تكافئ على التوالي :

$$-6x-3=x-2x-4$$
$$-6x-x+2x=-4+3$$
$$-5x=-1$$
$$x=\frac{-1}{-5}$$
$$x=\frac{1}{5}$$

إذن حل هذه االمعادلة هو العدد $\frac{1}{5}$.

6) – المعادلات و التعميـل :

1) – حـل المعادلة : $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$.

المعادلة $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$ تكافئ على التوالي :

$$(x+2)\left[(3x-1)+(-4x+5)\right]=0$$
$$(x+2)(3x-1-4x+5)=0$$
$$(x+2)(-x+4)=0$$
$$x+2=0 \quad \text{أو} \quad -x+4=0$$
$$x=-2 \quad \text{أو} \quad -x=-4$$
$$x=4$$

إذن المعادلة $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$ تقبل حلين هما : -2 و -4 .

2) – حـل المعادلة : $25x^2+30x+9=0$.

المعادلة $25x^2+30x+9=0$ تكافئ على التوالي :

$$(5x)^2+30x+3^2=0$$
$$(5x+3)^2=0$$
$$5x+3=0$$
$$5x=-3$$
$$x=\frac{-3}{5}$$

إذن حـل هذه المعادلة هو العدد $\frac{-3}{5}$.

II _ حـل المسائل :

1) – قاعدة

لحـل مسألة نتبع الخطوات الآتية :

1) – اختيار المجهول .

2) – صياغة المعادلة .

3) – حـل المعادلة .

4) – التحقق من الحل .

5) – الرجوع إلى المسألة .

2) – مثال :

حصان يحمل على ظهره 5 أكياس و 20 kg من القمح و3 أكيسان و

تمرين8

انطلقت سيارة من مدينة A متجهة نحو مدينة B بسرعة 64 km /h . وفي الساعة التاسعة

غادر راكب دراجة نارية المدينة B متجها نحو المدينة A بسرعة 36 km /h .

إذا علمت أن المسافة بين المدينة . A و المدينة B هي 239 km :

1) – ففي أي ساعة ستلتقي السيارة بالدراجـة ؟

2) – على أية مسافة من المدينة A سيلتقيان ؟

تمرين9

مات رجل و ترك مالا قدره 20000 درهما.

10 kg من الذرة، و جمل يحمل 3 أكياس و 80 kg من القمح و كيسان (2) و 50 kg من الشعير .

فأجهد ذلك على الجمل فقال له الحصان : كيف تشعر بالتعب و نحن نحمل نفس الوزن ؟

إذن ، إذا علمت أن الكيس الواحد من الشعير يزيد عن الكيس الواحد من القمح ب 10 kg، فما هو وزن الكيس الواحد من كـل نوع ؟

الحـل :

1) – اختيار المجهول :

ليكن x وزن الكيس الواحد من القمح .

2) – صياغة المعادلة :

بما أن x هو وزن الكيس الواحد من القمح فإن $(x+10)$ هو وزن الكيس الواحد من الشعير .

إذن : -- الوزن الذي يحمله الحصان هو :
$(5x+20)+[3(x+10)+10]$.

-- الوزن الذي يحمله الجمل هو :
$(3x+80)+[2(x+10)+50]$.

إذا علمت أن الإرث يرجع إلى أولاده الأربعة فقط : ابن واحد و ثلاث بنات و أن للذكر حظ الأنثيين

فكيف سيقسم هذا الإرث ؟

تمرين10

ثمن 8 أمتار من ثوب صوفي و 12 مترا من ثوب حريري هو : 2840 درهما.

إذا علمت أن ثمن المتر الواحد من الثوب الصوفي يزيد ب 30 درهما عن ثمن المتر الواحد من الثوب الحريري فما هو إذن ثمن المتر الواحد من كل نوع و ما هو ثمن الثوب الصوفي و ثمن الثوب الحريري ؟

تمرين11

أب عمره الآن يساوي ثلاث أمثال عمر ابنه.

بعد 10 سنوات سيصبح عمر الابن يساوي نصف عمر أبيه.

ما هو عمر كل واحد منهما الآن ؟

تمرين12

اقتسم ثلاثة أشخاص مبلغا من المال قدره 20275 درهما.

إذا علمت أن حصة الثاني تزيد عن حصة الأول ب 1347 درهما، و حصة الثالث تزيد حصة الثاني ب 556 درهما فما هي حصة كـل واحد منهـــم ؟

تمرين13

و بما أن الحصان و الجمل يحملان نفس الوزن فستكون لدينا المعادلة الآتية :

$$(5x+20)+[3(x+10)+10] = (3x+80)+[2(x+10)+50]$$

3) – حـل المعادلة :

المعادلة $(5x+20)+[3(x+10)+10] = (3x+80)+[2(x+10)+50]$ تكافئ على التوالي :

$$3x+80+2x+20+50 = 5x+20+3x+30+10$$
$$3x+2x-5x-3x = 20+30+10-80-20-50$$
$$-3x = -90$$
$$x = \frac{-90}{-3}$$
$$x = 30$$

إذن العدد 30 هو حـل هي المعادلة

4) – التحقق من الحـل :

في نهاية أسبوع دخل إلى المسرح 3600 متفرج .

بعد نهاية الحفل وجد في صندوق المسرح 280000 درهما.

إذا علمت أن ثمن تذكرة المقاعد الأمامية هو 120 درهما، و أن ثمن تذكرة المقاعد الخلفية هو 40 درهما فاحسب عدد المتفرجين الذين كانوا على المقاعد الأمامية و

$$(5x+20)+\left[3(x+10)+10\right] = 5\times 30+20+3(30+10)+10$$
$$=150+20+3\times 40+10$$
$$=150+20+120+10$$
$$=300$$

$$(3x+80)+\left[2(x+10)+50\right] = 3\times 30+80+2(30+10)+50$$
$$=90+80+2\times 40+50$$
$$=90+80+80+50$$
$$=300$$

5) – الرجوع إلى المسألة :

وزن الكيس الواحد من القمح هو : 30 kg .

وزن الكيس الواحد من الذرى هو : 40 kg .

II _ المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحـد :

1) – تعريف :

a و b و x أعداد حقيقية .

كل متفاوتة على شكـل : $ax+b>0$ أو $ax+b\geq 0$ أو $ax+b<0$ أو $ax+b\leq 0$

تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x.

2) – أمثلـة :

تمرين14

حـل المتراجحات الآتية :

$4x-7<2x+5$;; $6x+8\leq 4x+11$;; $-4x-5\geq 2x-5$;;

$3x-1<7x-3$

$x+3\geq 0$;; $x-5<0$;; $2x+3\geq 1$;; $4x+3\leq x-1$;;

$2x+5>x+3$

تمرين15

حـل المتراجحات الآتية :

$\frac{x}{2}-1\geq 0$;; $\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}<1$;; $\frac{x+2}{3}\leq\frac{x-1}{2}$;;

$\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3}>\frac{x+2}{6}-1$;; $\frac{x+7}{3}-\frac{1-x}{6}\geq\frac{x}{2}+3$

$\frac{3x-1}{5}-\frac{x}{2}<\frac{6x}{2}-\frac{x+3}{5}$;; $\frac{3x-7}{4}\leq\frac{2x-1}{8}$

المتفاوتات : $2x+5<0$ و $\sqrt{2}.x-5>0$ و

$\frac{1}{2}x-11\leq 0$ و $3x+3\geq 0$

تسمى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .

* / ملاحظة هامة :

الأعداد الحقيقية التي تحقق متراجحة تسمى حلول هذه المتراجحة .

3) – حـل متراجحة :

1) – حـل المتراجحة : $3x+2<0$.

المتراجحة $3x+2<0$ تكافئ على التوالي :

$$3x<-2$$

$$x<\frac{-2}{3}$$

الأعداد الحقيقية الأصغر قطعا من $\frac{-2}{3}$ هي حـلول المتراجحة $3x+2<0$.

2) – حـل المتراجحة : $-x+4\leq 2x-2$.

المتراجحة $-x+4\leq 2x-2$ تكافئ على التوالي :

$5x-2(3x+3)\leq 3(x+2)$;; $2(x-1)+3x\geq 4x+2$;;

$3x-4(x-2)\geq 5x-3(2x+3)$

$x+7(3-x)+5(x-2)<x+2$;;

$3(x+5)-2x>4x-5(x-1)$ $\frac{2}{3}(1-x)+\frac{5}{2}x<2x-\frac{1}{2}(3x-4)$

$7x+8+2(3-x)\geq 3(x+4)-(x-2)$;;

تمرين16

ABC مثلث بحيث.

$AB=4x-1$ و $AC=3x$ و $BC=\frac{2}{3}x+2$.

نضع P_{ABC} محيط المثلث ABC

أحسب قيم x التي من أجلها : $P_{ABC}\leq 49$.

تمرين17

حـل المتراجحات الآتية :

$\frac{3x-5}{2}+\frac{7x+2}{3}\leq\frac{x+1}{-2}-\frac{3x+4}{4}$;;

$6x-\frac{4}{3}<\frac{4x+1}{2}+4(x-3)$;; $\frac{2x-1}{4}+16\leq\frac{x-1}{3}$

$$-x-2x \le -2-4$$
$$-3x \le -6$$
$$x \ge \frac{-6}{-3}$$
$$x \ge 2$$

الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2 هي حـلول المتراجحة $-3x+4 \le 2x-2$.

* / تمثيل الحـلول على مستقيم مدرج :

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{5}<\frac{3x+1}{2}-\frac{7x}{5} \quad ;; \quad \frac{x+4}{2}-\frac{3x-4}{3}<\frac{2-x}{2}+\frac{2}{3} \quad ;;$$

$$x-3<2\left(2x-\frac{7}{2}\right)$$

$$\frac{7-x}{3}+\frac{5-3x}{7}\ge\frac{7x-12}{14}-4 \quad ;; \quad \left(2-\frac{x}{2}\right)-\frac{7}{2}<1+2x \quad ;;$$

$$\frac{x}{4}+\frac{9}{37}+\frac{2x-1}{2}>2x$$

تمرين18

حدد قيمة العدد الحقيقي x في كل حالة من الحالات الآتية :

1) - $-4 \le \frac{2x-2}{4} \le 3$

2) - $\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}x-1}{7} < 5$

3) - $0 \le \frac{5-3x}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) - $\frac{1}{2} < 3-\frac{2x}{5} \le 0,9$

5) - $2 \le \frac{3x}{2}-\frac{1-x}{3} \le 4$

6) - $-\frac{2}{3} < 7x + \frac{2x-3}{2} < \frac{1}{3}$

7) - $0 \le 3(2x-1) - \frac{4x+1}{2} \le 11$

تمرين19

حدد الأعداد الحقيقية x في كـل حالة من الحالات الآتية :

$\begin{cases} 2x-4 \ge 0 \\ x-1 \le 0 \end{cases}$;; $\begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ 7-2x > 0 \end{cases}$;; $\begin{cases} 3x+4 \ge 0 \\ x-2 \ge 0 \end{cases}$;;

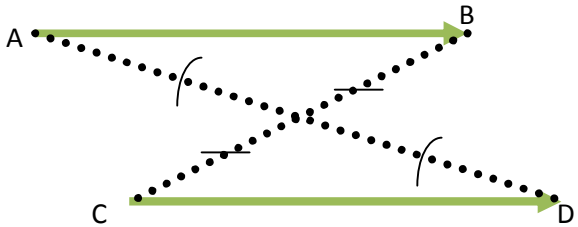
$\begin{cases} 2x-1 \ge -3 \\ x+2 \le \frac{1}{2} \end{cases}$

	عنوان الدرس : المتجهات و الإزاحة المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 10 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
المتجهات متوازي أضلاع المفاهيم الأساسية في الهندسة المستوية	التعرف على صورة نقطة بإزاحة معلومة. التعرف على الإزاحة T التي تحول النقطة A إلى النقطة B إنشاء صورة نقطة بإزاحة معلومة. التعرف على صورة قطعة و مستقيم ونصف مستقيم وزاوية ودائرة بإزاحة. استعمال إزاحة في حل مسائل هندسية.	يتم التذكير ودعم مكتسبات التلاميذ حول المتجهات. التأكيد على الحفاظ على المسافة و قياس الزوايا. يقدم ضرب متجهة في عدد حقيقي انطلاقا من وضعيات هندسية بسيطة علما أن تحقيق هذه الكفاية سيتم في الجذع المشترك العلمي و الجذع المشترك التكنولوجي.

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
I تساوي متجهتين : إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ فإن [AD] و [BC] لهما نفس المنتصف إذا كان [AD] و [BC] لهما نفس المنتصف فإن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$	تمرين1 ليكن ABC مثلثا و I و J و K ثلاث نقط بحيث : $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

* شكل توضيحي :



2) تعريف ❷ :

إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ فإن الرباعي ABDC متوازي الأضلاع

إذا كان رباعي ABDC متوازي الأضلاع فإن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

* شكل توضيحي :

1) – بين أن : $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و أن :

$$\overrightarrow{JK}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}-\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$$

2) – استنتج أن النقط : I و J و K مستقيمية.

تمرين2

ليكن ABCD متوازي الأضلاع .

1) – أنشئ النقط : M و N و P و Q بحيث :

$\overrightarrow{CP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{DQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$$

2) – أثبت أن الرباعي $MNPQ$ متوازي أضـلاع.

تمرين3

3) خاصية :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أن :

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس الإتجاه أي (AB) // (CD)

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنحى .

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنظم (المعيار) أي AB = CD .

ABC مثلث.

1) – أنشئ النقطتين M و N بحيث : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

2) – أثبت أن : B منتصف القطعة [MN] .

تمرين4

ليكن ABC مثلثا .

1) – أنشئ النقطتين E و F بحيث : $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

2) – أثبت أن المتجهتين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AF}$ مستقيميتين.

3) – استنتج أن النقط : A و E و F مستقيمية.

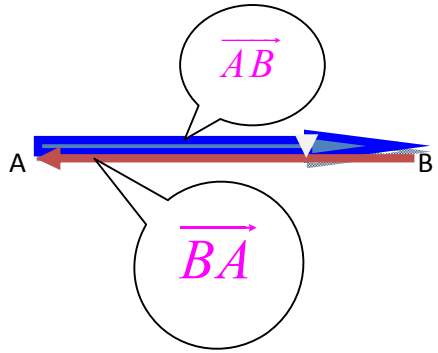
تمرين5

4) المتجهة المنعدمة :

$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \vec{O}$ متجهة منعدمة

إذا كان $\overrightarrow{AB} = \vec{O}$ فإن : A = B (A و B منطبقتان)

5) مقابل متجهة :



مقابل المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هي المتجهة $\overrightarrow{BA}$.

و نكتب : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

ليكن ABC مثلثا .

1) – أنشئ النقطتين I و J بحيث : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.

2) – أثبت أن المستقيمين (IC) و (BJ) متوازيان.

تمرين6

ليكن ABCD متوازي أضلاع و O نقطة من المستوى.

1) – أنشئ النقط P و Q و R بحيث : $\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{OR} = 3\overrightarrow{OB}$.

2) – أنشئ النقطة I بحيث RPQI متوازي أضـلاع.

3) – أثبت أن النقط : O و D و Q مستقيمية.

4) – أثبت أن المتجهتين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتان.

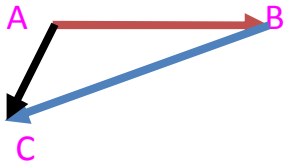
5) – أثبت أن النقط : O و C و I مستقيمية.

6) مجموع متجهتين :

أ- علاقة شال

لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متجهتين غير منعدمتين

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



ب- مجموع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو المتجهة $\overrightarrow{AD}$

بحيث الرباعي ABDC متوازي الأضلاع.

* شكل هندسي :

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتان غير منعدمتين .

لننشئ النقطة D بحيث : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

تمرين7

ABC مثلث.

1) – أنشئ النقطتين E وF بحيث : $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

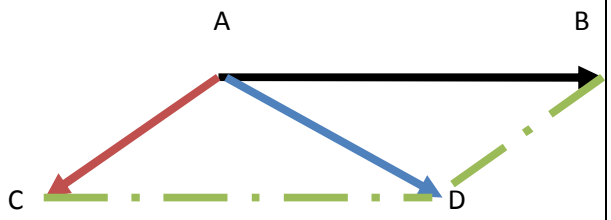
2) – أنشئ النقطة M بحيث : $\overrightarrow{FM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

3) – بين أن المستقيم (FM) يوازي المستقيم (AB) .

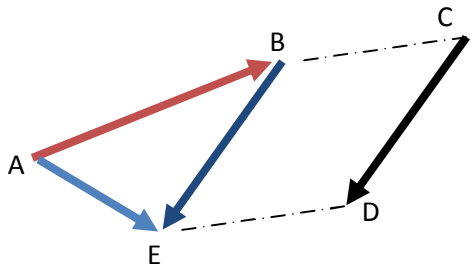
4) – أنشئ النقطة N بحيث : $\overrightarrow{AN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$.

5) – بين أن : $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{BC}$ متجهتان مستقيميتان .

6) – لتكن H نقطة بحيث : $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$. بين أن : A و N و H نقط مستقيمية .



- مجموع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$



$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان غير منعدمتين .

لننشئ E بحيث : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

من أجل هذا سننشئ E بحيث : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$

أي BEDC متوازي الأضلاع .

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

7) ضرب متجهة في عدد حقيقي :

أ)مثال

لنعتبر المستقيم (AB) وC نقطة منه حيث: $AB = \frac{2}{3}AC$

شكل هندسي 1

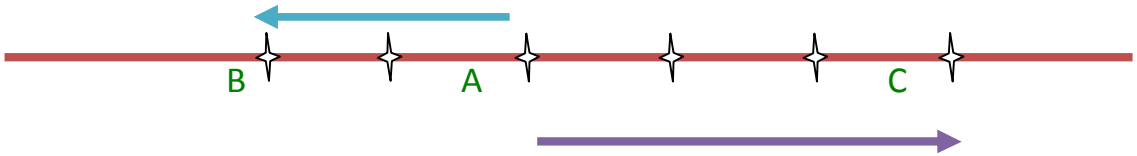
بما أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى و $AB = \frac{2}{3}AC$

فإننا نكتب $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

ونقول : المتجهة $\overrightarrow{AB}$ تساوي جداء المتجهة $\overrightarrow{AC}$ في العدد الحقيقي $\frac{2}{3}$

شكل هندسي 2

شكل هندسي 1



بما أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس المنحى و $AB = \frac{2}{3}AC$

فإننا نكتب $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

ونقول : المتجهة $\overrightarrow{AB}$ تساوي جداء المتجهة $\overrightarrow{AC}$ في العدد الحقيقي $-\frac{2}{3}$

ب) صفة عامة

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي .

نسمي المتجهة $\overrightarrow{AM}$ جداء المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في العدد الحقيقي k ،

إذا كانت

M نقطة من المستقيم (AB) بحيث : $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$.

-- إذا كان $k > 0$ فإن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ لهما نفس المنحى .

-- إذا كان $k < 0$ فإن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ لهما منحيان متعاكسان.

ج) المتجهة و المنتصف

A و B و M ثلاث نقط

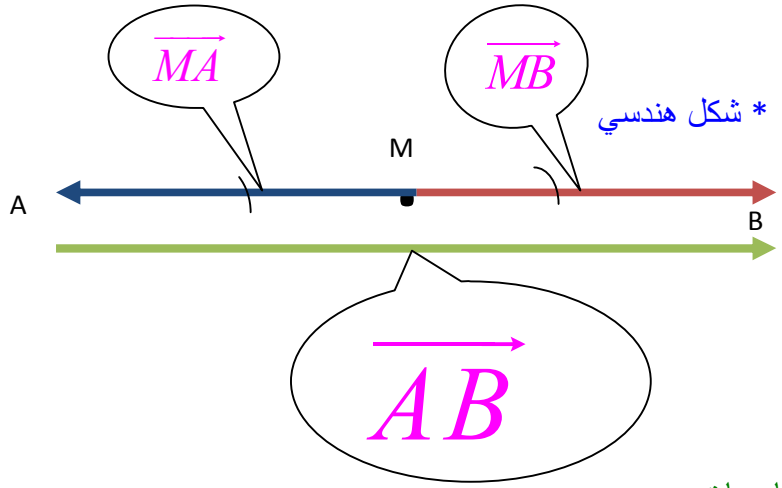
M منتصف [AB] يعني أن $\overrightarrow{MA} = -1\overrightarrow{MB}$

كما أن $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{O}$

وأن $\overrightarrow{AM} = 1\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

و $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AM}$

* شكل هندسي



د) خاصيات :

a) النقط المستقيمية

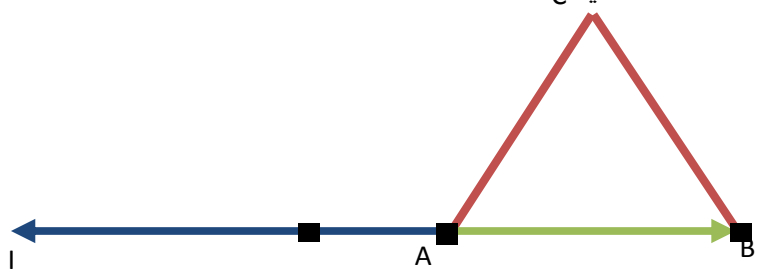
تمرين تمهيدي

ليكن ABCمثلث و I نقطة حيث: $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

1) أنشئ الشكل
2) بين أن A و B و C نقط مستقيمية

إشارة للحل

1- شكل هندسي



3) لنبين أن A و B و I نقط مستقيمية:

لدينا $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AI}$ لهما نفس الاتجاه

وبالتالي (AB) و(AI) متوازيان منطبقان لأن لهما نقطة مشتركة

إذن A و B و I نقط مستقيمية

خاصية

K عدد حقيقي غير منعدم

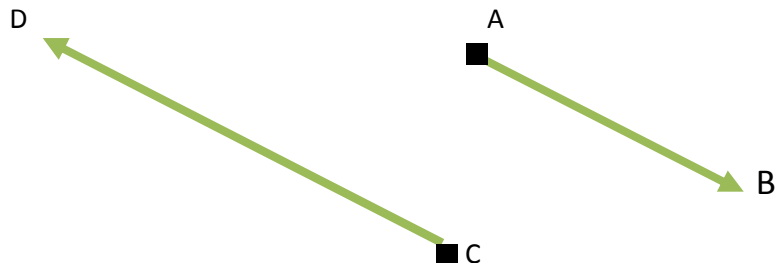
* / إذا كان : $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية .

b)المتجهتان المستقيميتان

مثال :

A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية .

لننشئ D بحيث : $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ يعني أن (AB) // (CD)

نقول : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان مستقيميتان منحاهما متعاكسان .

خاصية

* / إذا كان : $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$ فإن (AB) // (CD)

و نقول : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان مستقيميتان .

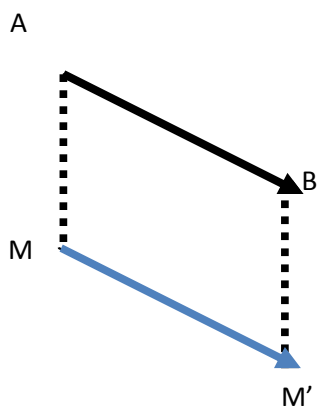
II الإزاحـة :

3) مثال وتعريف:

مثال:

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و M نقطة .

لننشئ النقطة M' بحيث : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$



تمرين8

ليكن ABC مثلثا.

1) – أنشئ النقطتين E و F مماثلتا C و A على التوالي بالنسبة للنقطة B .

2) – أنشئ النقطتين M و N صورتا A و C على التوالي بالإزاحة التي تحول F إلى E .

3) – برهن أن : $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{FN}$.

تمرين9

ABCD متوازي أضلاع و M صورة C بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BD}$.

1) – أرسم شكـلا.

2) – أثبت أن الرباعي BCMD متوازي الأضـلاع.

3) – بين أن : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD}$.

تمرين10

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ يعني أن ABM'M متوازي الأضلاع .

نقول :M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ ونرمز لها ب: $t_{\overrightarrow{AB}}$

أونقول: M' صورة M بالإزاحة التي تحول Aإلى B ونرمز لها كذلك ب: t أو T

– تعريف :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و M نقطة .

M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ (أو بالإزاحة التي تحول A إلى B)

يعني أن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ أي ABM'M متوازي الأضلاع .

EFGH متوازي أضلاع و O نقطة من المستوى.

1) – أنشئ M صورة O بالإزاحة التي تحول E إلى F .

2) – أنشئ N صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{EH}$.

3) – أثبت أن N هي صورة O بالإزاحة التي تحول E إلى G .

تمرين11

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A و E منتصف [BC] .

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{EA}$.

1) – أنشئ النقط A' و B' و C' صور النقط A و B و C على التوالي بالإزاحة t .

2) – أثبت أن A'B'C' مثلث متساوي الساقين .

3) – بين أن A منتصف [B'C'] .

2) خاصية أساسية :

تمرين تمهيدي

لنعتبر الإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}$

A و B نقطتين حيث A' و B' صوريهما على التوالي بالإزاحة t

بين أن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

خاصية

إذا كانت M' و N' صورتي M و N على التوالي بإزاحة

فإن : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

3) – صور بعض الأشكـال :

أ) صورة مستقيم :

مثال

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و (EF) مستقيم

لننشئ صورة (EF) بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

لنضع E' و F' صورتي E و F على التوالي بهذه الإزاحة

تمرين12

[AB] قطعة و (C) و (C') دائرتان مركزاهما A و B على التوالي.

(C) و (C') تتقاطعان في نقطتين مختلفتين E و F .

نعتب الإزاحة t التي تحول A إلى B .

1) – أنشئ E' صورة E بالإزاحة t .

2) – أثبت أن المثلث EE'F قائم الزاوية.

3) – استنتج أن B منتصف [FE'] .

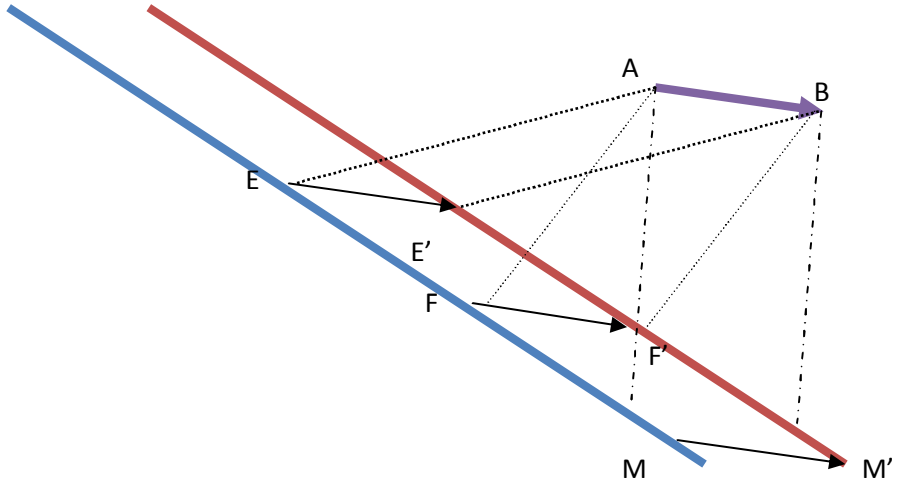
4) – لتكن M نقطة من الدائرة (C) تختلف عن E و F .

أ) -- أنشئ M' صورة M بالإزاحة t .

ب) -- بين أن المستقيم (EM) عمودي على المستقيم (FM') .

ولنعتبر M نقطة ما من المستقيم (EF) حيث:M’ صورتها

شكل هندسي



بما أن M من المستقيم (EF) فإن E و F و M نقط مستقيمية

إذن يوجد عدد حقيقي K حيث $\overrightarrow{EF} = K\,\overrightarrow{EM}$ (1)

تمرين13

لاحـظ الشكـل جانبه بحيث :

ABC مثلث قائم الزاوية في A

و $\overrightarrow{EF}$ متجهة غير منعدمـة.

1) – أنقل الشكـل في دفترك.

2) – أنشئ A’ و B’ و C’ صور A و B و C على التوالي بالإزاحة التي تحول E إلى F .

3) – أثبت أن المثلث A’B’C’ قائم الزاوية.

4) – بين أن : (BC) // (B’C’) .

وحيث E’ و F’ و M’ صور E و F و M على التوالي بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$

فإن : و $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{E'M'}$ (2)

من (1) و(2) نجد : $\overrightarrow{E'F'} = K\,\overrightarrow{E'M'}$

إذن E’ و F’ و M’ نقط مستقيمية

وبالتالي كلما تحركت Mعلى المستقيم (EF) فإن M’ تتحرك على المستقيم (E’F’) (والعكس صحيح)

إذن نقول صورة المستقيم (EF) بهذه الإزاحة هو المستقيم (E’F’)

وحيث $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{E'F'}$ فإن (EF) يوازي (E’F’)

خاصية

صورة مستقيم بإزاحة هو مستقيم يوازيه

/ ملاحظة هامة :

لإنشاء صورة مستقيم بإزاحة نحدد نقطتين مختلفتين على هذا المستقيم

ثم ننشئ صورتيهما بنفس الإزاحة .

ب)استنتاج

صورة قطعة :

صورة قطعة [EF] بإزاحة هي القطعة [E'F'] بحيث :

E' و F' هما صورتي E و F على التوالي بنفس الإزاحة

و سيكون لدينا : (EF) // (E'F') و EF = E'F'

صورة نصف مستقيم :

صورة نصف مستقيم [EF) بإزاحة هي نصف المستقيم [E'F') بحيث :

على التوالي بنفس الإزاحة F و E هما صورتي F' و E'

و سيكون لدينا : (EF) // (E'F')

صورة زاوية :

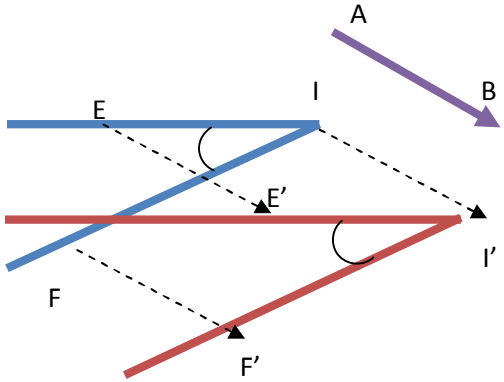
صورة زاوية $A\hat{O}B$ بإزاحة هي الزاوية $A'\hat{O}'B'$ بحيث :

A' و O' و B' هي صور A و O و B على التوالي بنفس الإزاحة .

و سيكون لدينا : $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$

* / مثال :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و $\widehat{EIF}$ زاوية .



لننشئ الزاوية $\widehat{E'I'F'}$ صورة $\widehat{EIF}$

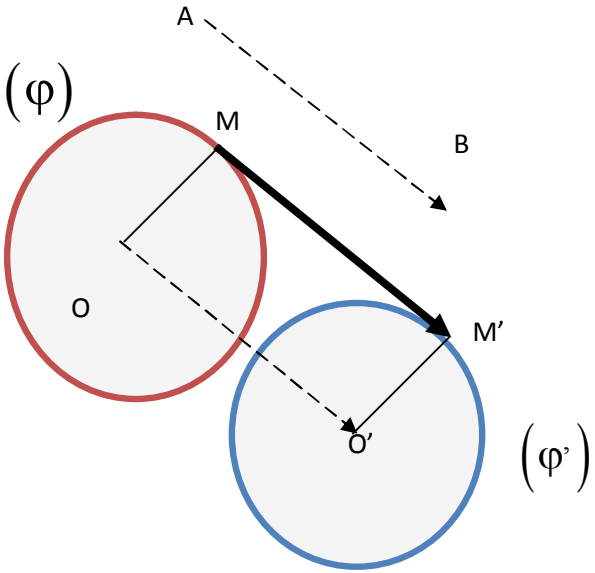
بالإزاحة التي تحول A إلى B .

صورة دائـرة :

صورة دائرة (C) مركزها O و شعاعها r هي الدائرة (C') مركزها O' صورة O بنفس الإزاحة و لها نفس الشعاع r .

* / مثال :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و (φ) دائرة مركزها O و شعاعها r .



لننشئ الدائرة (φ') صورة (φ)

بالإزاحة التي تحول A إلى B .

لنبين أن للدائرتين نفس الشعاع r .

لدينا :

O' صورة O بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

إذن : $OM = O'M'$

و بما أن $OM = r$ فإن $O'M' = r$

و منه ننستنتج أن للدائرتين نفس الشعاع r .

* / ملاحظة هامة :

لإنشاء صورة دائرة بإزاحة ننشئ صورة المركز بنفس الإزاحة

ثم نحتفظ بنفس الشعاع .

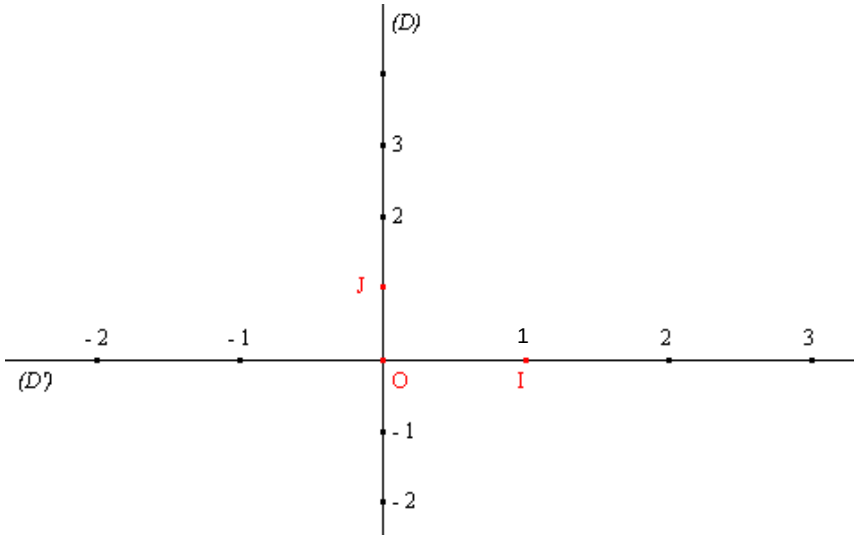
	عنوان الدرس : إحداثيتا كل من النقطة والمتجهة المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 10 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
المتجهات المعادلات مبرهنة فيتاغورس المستقيم المدرج	تحديد إحداثيتي متجهة. تحديد إحداثيتي منتصف قطعة. تحديد إحداثيتي مجموع متجهتين تحديد المسافة بين نقطتين معرفتين بإحداثيتيهما.	التذكير بأفصول وأرتوب نقطة و تثبيت المصطلحات ثم الاستعمال و التمثيل. ينبغي ربط إحداثيتا نقطة بإحداثيتي متجهة

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
I إحداثيتا نقطة : 1) المعلم في المستوى: a) مثال :	تمرن1 نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم ممنظم متعامد $(O;I;J)$. 1) – أنشئ النقط : $A(-1;3)$ و $B(4;-2)$ و $C(2;4)$ و $D(-3;9)$ و $E(-8;-6)$.

نعتبر (D) و (D') مستقيمان متعامدان في O و مدرجان بحيث :

(D) وحدة تدريجه هي OI و (D') وحدة تدريجه هي OJ .



نقول أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$.

2) – حدد إحداثيتي كلا من النقط : F و M و N منتصفات [AB] و [BD] و [EC] على التوالي.

3) – حدد إحداثيتي كلا من المتجهات : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{BE}$ و $3\overrightarrow{AC}$ و $\frac{2}{5}\overrightarrow{ED}$

و $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DC}$ و $2\overrightarrow{ED}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

4) – أثبت أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع.

5) – حدد إحداثيتي R بحيث : $\overrightarrow{BR}=2\overrightarrow{BC}$.

تمرين2

- النقطة O تسمى : أصل المعلم $(O;I;J)$.
- المستقيم (OI) يسمى : محور الأفاصيل .
- المستقيم (OJ) يسمى : محور الأراتيب .

b) ملاحظة

إذا كان OI = OJ = 1 نسمي $(O;I;J)$: معلم ممنظم .

2) إحداثيتا نقطة :

a) مثال

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

ونعتبر النقطة m من المستوى

m1 مسقطها العمودي على محور الأفاصيل وm2 مسقطها العمودي على محور الأراتيب

$(O;I;J)$ معلم ممنظم متعامد للمستوى.

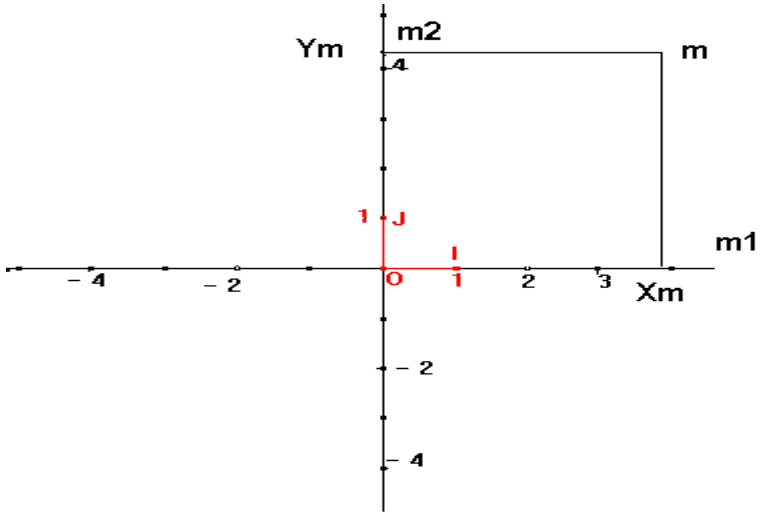
1) -أنشئ النقط : $A(3;2)$ و $B(1;-2)$ و $C(-5;1)$.

2) – أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية.

3) – حدد إحداثيتي النقطة E منتصف القطعة [AB] .

4) – حدد إحداثيتي النقطة F إذا علمت أن C منتصف القطعة [BF] .

تمرين3



نلاحظ أن العدد Xm هو أفصول النقطة m1 على محور الأفاصيل

العدد Ym هو أفصول النقطة m2على محور الأراتيب

نقول : الزوج (Xm ;Ym) يسمى زوج إحداثيتا النقطة m

نكتب m(Xm ;Ym)

يسمى العدد Xmب أفصول النقطة m

العدد Ymب أرتوب النقطة m

$(O;I;J)$ معلم ممنظم متعامد للمستوى.

نعتبر النقط : $A(3;1)$ و $B(-1;-2)$ و $C(0;2)$ و $D(x;y)$.

1) – أنشئ النقط A و B و C .

2) – حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ ثم أحسب المسافة AB .

3) – أحسب x و y بحيث يكون الرباعي ABCDمتوازي الأضلاع.

4) – حدد إحداثيتي O مركز متوازي الأضلاع ABCD .

5) – نعتبر النقطة $K\left(1;-\frac{1}{2}\right)$. أثبت أن K منتصف القطعة [AB] .

b) تعريف :

$(O;I;J)$ معلم متعامد ممنظم منسوب للمستوى

كل نقطة M في المستوى مرتبطة بزوج $(x_M;y_M)$ يسمى زوج إحداثيتي النقطة M .

العدد x_M يسمى : أفصول M و العدد y_M يسمى أرتوب M

نكتب : $M(x_M;y_M)$ أو $M\begin{pmatrix}x_M\\y_M\end{pmatrix}$

c) ملاحظات هامة :

- إذا كان $(O;I;J)$ معلما للمستوى فإن : $O(0;0)$ و $I(1;0)$ و $J(0;1)$.
- إذا كانت M تنتمي إلى (OI) فإن : $M(x_M;0)$.
- إذا كانت M تنتمي إلى (OJ) فإن : $M(0;y_M)$.

d) تمرين محلول

نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم ممنظم متعامد $(O;I;J)$.

لاحظ الشكـل الآتي :

تمرين4

$(O;I;J)$ معلم ممنظم متعامد للمستوى. حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في كل من الحالات الآتية :

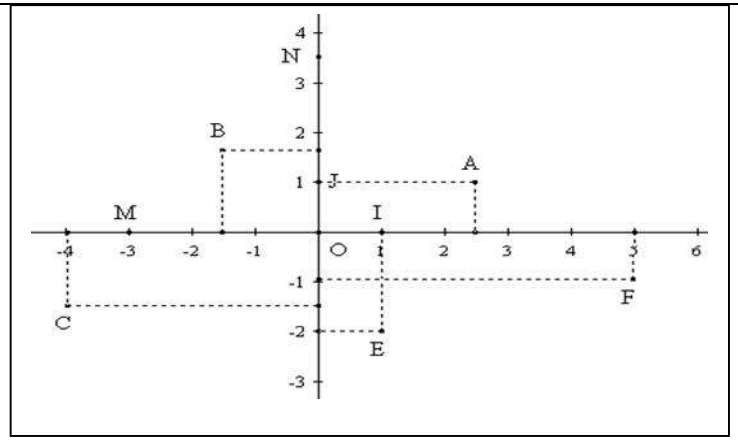
$B(-2;4)$ و $A(1;-3)$

$B(-1;1)$ و $A(0;5)$

$B(-5;2)$ و $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$

$B(4;4)$ و $A(-4;-4)$

تمرين5



1) – حدد إحداثيتي كل من النقط : A و B و C و E و F و M و N .

2) – أنشئ النقط : $A'(-1;3)$ و $B'(4;-2)$ و $C'(0;4)$ و $C'(-2;0)$

نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم ممنظم متعامد $(O;I;J)$.

1) – أنشئ النقط : $E(-3;4)$ و $F(1;-2)$ و $M(6;1)$ و $N(2;7)$.

2) – بين أن الرباعي EFMN متوازي الأضلاع .

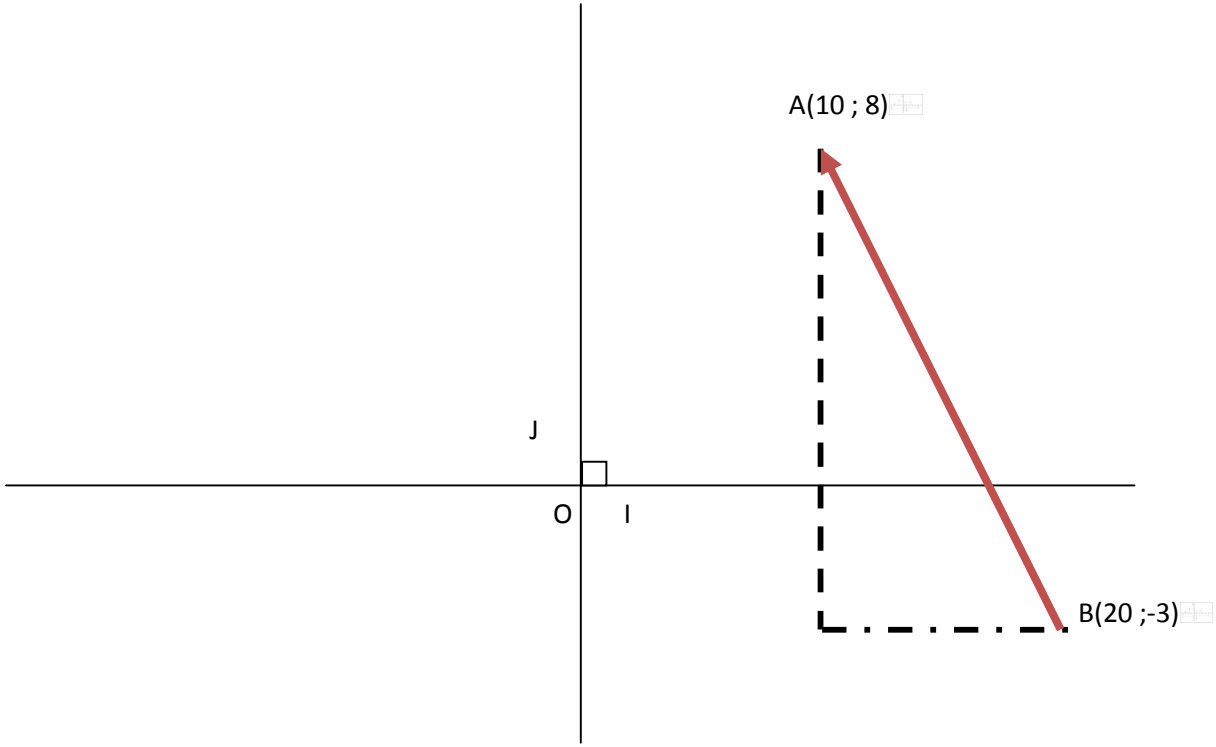
3) – حدد إحداثيتي النقطة O مركز متوازي الأضلاع EFMN .

تمرين6

II _ إحداثيتا متجهة :

1) مثال

لنعتبر المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O ;I ;J) والشكل التالي :



انطلاقا من النقطة B نتنقل ب10تربيعات نحوى اليسار وب11 تربيعة نحوى الأعلى

نعبر عن هذا التنقل بالزوج (11; 10-)

ونقول : زوج إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{BA}$ هو الزوج (11; 10-)

$(0;I;J)$ معلم متعامد ممنظم للمستوى.

هل النقط A و B و C مستقيمية في الحالات الآتية :

* $\left.\begin{array}{l} A(\frac{1}{2};-\frac{1}{3}) \\ B(4;5) \\ C(\frac{-1}{2};4) \end{array}\right\}$

* $\left.\begin{array}{l} A(1;2) \\ B(2;-3) \\ C(0;1) \end{array}\right\}$

* $\left.\begin{array}{l} A(1,2) \\ B(-1;3) \\ C(-1;1) \end{array}\right\}$

* $\left.\begin{array}{l} A(-\sqrt{2};-\frac{1}{4}) \\ B(0;4) \\ C(\sqrt{2};\frac{6}{2}) \end{array}\right\}$

تمرين7

ونكتب: $\overrightarrow{BA}(-10;11)$ أو $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-10\\11\end{pmatrix}$

ولدينا حسب الشكل: $\begin{cases} B(20\,;-3) \\ A(10\,;8) \end{cases}$

نلاحظ أن أفصول A ناقص أفصول B يساوي أفصول $\overrightarrow{BA}$ (10-20= -10)

أرتوب A ناقص أرتوب B يساوي أرتوب $\overrightarrow{BA}$ (8-(-3))=11)

دون اللجوء إلى الشكل يمكن أن نكتب اعتمادا على إحداثيتا كل من A و B : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}10-20\\8-(-3)\end{pmatrix}$

2) – تعريف :

$(O;I;J)$ معلم متعامد منسوب للمستوى

إذا كانت $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتين فإن :

إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هما : x_B-x_A و y_B-y_A

و نكتب : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$

3) تمرين تطبيقي

$A(-2;3)$ و $B(1;-5)$ نقطتان من المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$.

لنحسب إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$

إشارة للحل

$(0;I;J)$ معلم متعامد ممنظم للمستوى.

نعتبر النقط : $A(1;2)$ و $B(2;0)$ و $C(4;5)$ و $D(6;1)$.

1) – حدد العدد الحقيقي a الذي يحقق : $\overrightarrow{CD}=a\overrightarrow{AB}$.

2) – استنتج أن : (AB) // (CD) .

تمرين8

لدينا : $\begin{cases} x_B - x_A = 1-(-2) = 1+2 = 3 \\ y_B - y_A = -5-3 = -8 \end{cases}$

إذن : $\overrightarrow{AB}(3;-8)$.

4) إستنتاج

a) تساوي متجهتين

$(O;I;J)$ معلم متعامد منسوب للمستوى

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان غير منعدمتين

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أن : $\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$

$(0;I;J)$ معلم متعامد ممنظم للمستوى.

1) – أنشئ النقط : $A(-3;-2)$ و $B(4;3)$ و $C(5;-2)$ و $D(-3;2)$ و $E(-4;-3)$.

2) – أحسب إحداثيتي النقطة M إذا علمت أن : $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{O}$.

3) – أحسب إحداثيتي النقطة N إذا علمت أن : $\overrightarrow{NC} + 2\overrightarrow{ND} + 3\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{O}$.

4) – حدد إحداثيتي كل من P و Q و R منتصفات : [AB] و [CD] و [EA] على التوالي.

تمرين9

b) إحداثيتا منتصف قطعة :

$(O;I;J)$ معلم متعامد منسوب للمستوى

إذاكانت M منتصف قطعة [AB] فإن : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

c) إحداثيتا مجموع متجهتين :

$(O;I;J)$ معلم متعامد منسوب للمستوى

$\overrightarrow{AB}(a;b)$ و $\overrightarrow{CD}(c;d)$ متجهتان غير منعدمتين

إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ هما : $a+c$ و $b+d$

ونكتب : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(a+c\,;b+d)$

$(0;I;J)$ معلم متعامد ممنظم للمستوى.

1) – أنشئ النقط : $A(-2;1)$ و $B(-4;3)$ و $C(1;3)$ و $M(5;-1)$.

2) – أحسب إحداثيتي كلا من المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CM}$ ثم أحسب المسافة AB .

3) – حدد إحداثيتي D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

4) – حدد إحداثيتي النقطة I مركز متوازي الأضلاع $ABCD$.

5) – بين أن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CM}$ مستقيميتان.

6) – نعتبر النقطة $E(5;x)$. أحسب x إذا علمت أن المستقيم (AB) يوازي المستقيم (EC) .

تمرين10

d)إحداثيتا جداء متجهة في عدد حقيقي :

$(O;I;J)$ معلم متعامد منسوب للمستوى

$\overrightarrow{AB}(a;b)$ و k عدد حقيقي غير منعدم

إحداثيتا المتجهة $k.\overrightarrow{AB}$ هما : $k.a$ و $k.b$

ونكتب : $k.\overrightarrow{AB}(k.a\,;k.b)$

$(0;I;J)$ معلم ممنظم متعامد للمستوى.

1) – أنشئ النقط : $E(-6;3)$ و $F(2;7)$ و $G(-3:-3)$.

2) – أثبت أن المثلث EFG قائم الزاوية.

3) – نضـع $E\hat{F}G=\alpha$. أحسب :

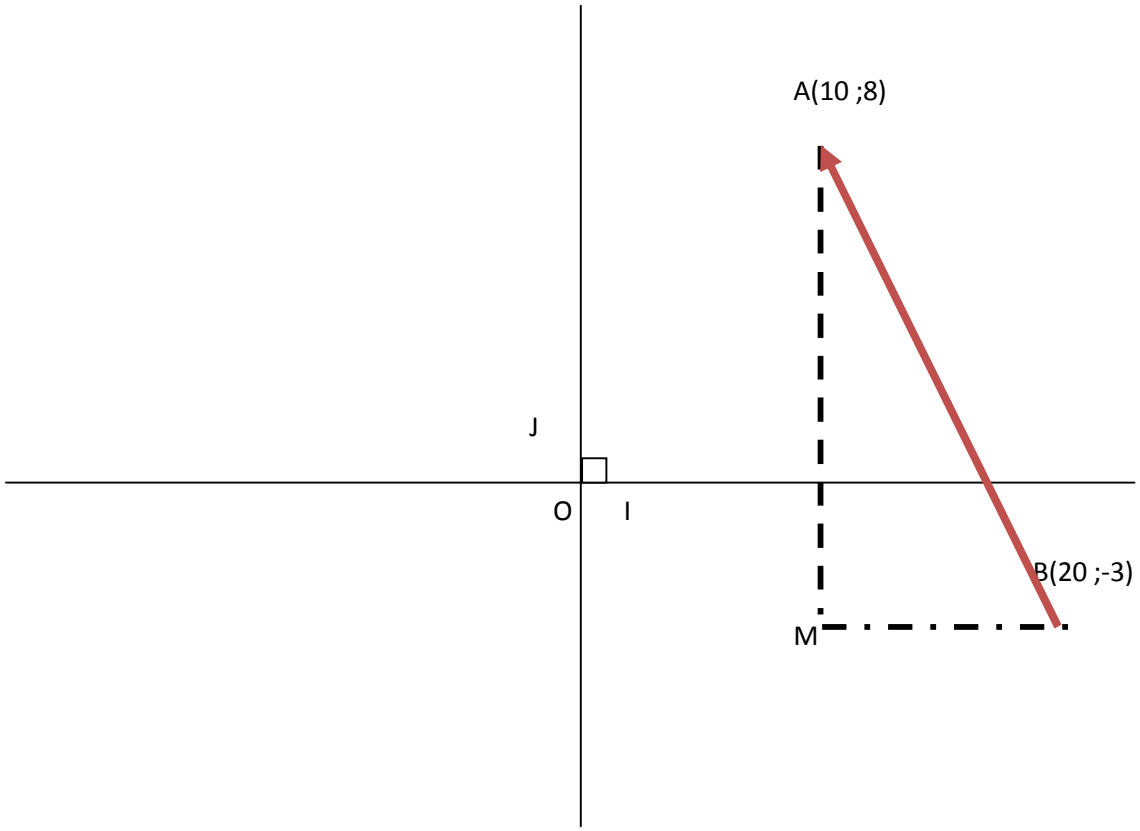
$\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$

تمرين11

III) المسافة بين نقطتين :

1- مثال

لنعتبر المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O ;I ;J) والنقط A(10 ;8)؛ B(20 ;-3) و M



من خلال الشكل نلاحظ أن : AM=11 و BM=10

فلنحسب AB أي BA

$(0;I;J)$ معلم ممنظم متعامد للمستوى.

1) – أنشئ النقط :

$A(2;1)$;; $B(0;4)$;; $C(-1;3)$;;
$E(2;2)$;; $F(-7;-4)$;; $G(0;5)$.

2) – حدد إحداثيتي D بحيث يكون ABCD متوازي الأضلاع.

3) – المستقيم المار من D و الموازي للمستقيم (AC) يقطع المستقيم (AB) في النقطة M . حدد إحداثيتي M .

4) – حدد إحداثيتي النقطة N مماثلة النقطة B بالنسبة للنقطة C .

5) – بين أن النقط : M و D و N مستقيمية.

6) – بين أن المثلث EFG قائم الزاوية.

7) – حدد إحداثيتي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث EFG .

لدينا ABM مثلث قائم الزاوية في M

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة نجد: $AB^2=BM^2+AM^2$

أي $AB^2=10^2+11^2$

وبالتالي $AB=\sqrt{10^2+11^2}$

أي $AB=\sqrt{(20-10)^2+(8-(-3))^2}$

2) قاعدة :

في معلم متعامد ممنظم

إذا كانت $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فإن :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

	3)تمرين تطبيقي في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$ نعتبر النقطتين $A(-1;3)$ و $B(3,2)$. أحسب كل من AB وIA وJB

	عنوان الدرس : معادلة مستقيم المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 6 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
الدالة لتآلفية و تمثيلها المبياني إحداثيتا منتصف قطعة متوازي أضلاع مبرهنة فيتاغورس المسافة بن نقطين	تحديد المعادلة المختصرة لمستقيم. التعرف على توازي مستقيمين من خلال ميليهما. التعرف على تعامد مستقيمين من خلال ميليهما. استعمال الهندسة التحليلية في حل مسائل.	*ينبغي الربط بين معادلة مستقيم والدالة التآلفية* يكون المستقيمان : $(D): y = ax + b$ $(\Delta): y = a'x + b'$ متوازيين إذا وفقط إذا كان a'= a متعامدين إذا وفقط إذا كان a.a'=-1. ربط هذه الفقرة بحل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
I _ **المعادلة المختصرة لمستقيم غير مواز لمحور الأراتيب** : مدخل لنعتبر الدالة التآلفية f التي تمثيلها المبياني هو المستقيم (D) إذن f(x) = ax+b لنضع $A(\alpha;\beta)$ نقطة من (D) و $B(\delta;\mu)$ نقطة أخرى من (D) إذن $f(\alpha)=\beta$ و $f(\delta)=\mu$ وبالتالي: $a=\frac{f(\alpha)-f(\delta)}{\alpha-\delta}=\frac{\beta-\mu}{\alpha-\delta}=m$ حيث m عدد حقيقي إذن f(x)=mx+b وبالتالي $f(\alpha)=m\alpha+b=\beta$ إذن $b=\beta-m\alpha=p$ حيث p عدد حقيقي وبالتالي $\boxed{f(x)= mx+p}$ ونعلم أن لكل نقطة M(x ;y) من المستقيم (D) نجد y=f(x) إذن y=mx+p ملاحظة :كل نقطة زوج إحداثيتيها يحقق y=mx+p فهي لن تكون خارج المستقيم (D) نقول : المعادلة y=mx+p تسمى المعادلة المختصرة للمستقيم (D) العدد m يسمى ميل أو المعامل الموجه للمستقيم (D).	تمرين1 حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) في كل من الحالات الآتية : أ) $A(2;-5)$ و $B(-4;1)$ ب) $A(3;3)$ و $B(1;-5)$ ج) $A(2;0)$ و $B(-1;4)$ د) $A(-2;-\frac{1}{2})$ و $B(4;-4)$ تمرين2 مستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم $(O;I;J)$. نعتبر النقط : $A(3;1)$ و $B(-1;-1)$ و $C(\alpha;-2)$. 1) – بين أن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي : $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

العدد p يسمى الأرتوب عند الأصـل .

1) – تعريف :

مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق المتساوية : $y = mx + p$ هي مستقيم .

المتساوية $y = mx + p$ تسمى المعادلة المختصرة لمستقيـم .

العدد m يسمى الميل أو المعامل الموجه .

العدد p يسمى الأرتوب عند الأصـل .

m و p عددان حقيقيان معلومان

2) – مثال 1 : معادلة مستقيم غير مواز لمحور الأراتيب :

نعتبر (D) مستقيم معادلته المختصرة هي : $(D): y = \frac{-1}{2}x + 5$.

ميل المستقيم (D) هو العدد $\frac{-1}{2}$.

الأرتوب عند الأصـل هو العدد 5 .

3) – مثال 2 : إنشاء مستقيم معرف بمعادلته :

2) – حدد قيمة α إذا علمت أن : $C \in (AB)$.

3) – حدد إحداثيتي النقطة M تقاطع المستقيم (AB) و محور الأفاصيل.

4) – حدد إحداثيتي النقطة N تقاطع المستقيم (AB) و محور الأراتيب.

تمرين3

المستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم $(O;I;J)$.

نعتبر (Δ) مستقيما ذا المعادلة : $y = \frac{1}{2}x - 5$.

1) – حدد المعامل الموجه للمستقيم (Δ) .

2) – من بين النقط الآتية حدد التي تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

$A(2;-4)$; $B(3;-2)$; $C(0;-5)$; $E\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$;

$F\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}-10}{2}\right)$ $G\left(\frac{-3}{2};-\frac{23}{4}\right)$

3) – أنشئ المستقيم . (Δ)

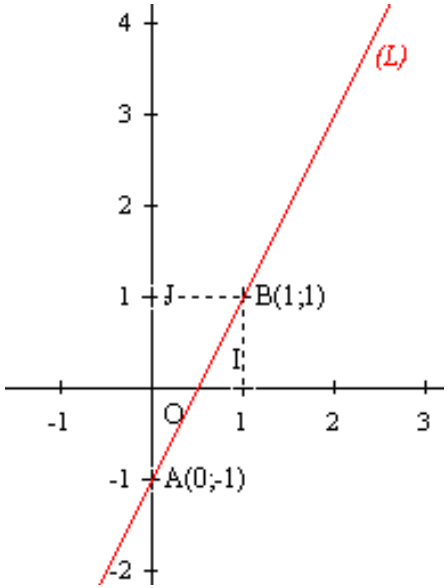
لننشئ المستقيم (L) الذي معادلته المختصرة هي :

$(L): y = 2x - 1$.

لدينا :

x	0	1
y	-1	1
$M(x;y)$	$A(0;-1)$	$B(1;1)$

إذن :



تمرين4

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$ نعتبر النقطتين :

$A(2;3)$ و $B(-2;5)$.

1) – حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB).

2) – نعتبر المستقيم (D) ذو المعادلة : $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

بين أن المستقيم (D) يوازي المستقيم (AB) .

3) – بين أن المستقيم (L) ذوالمعادلة : $2x - y + 4 = 0$ هو واسط القطعة [AB] .

4) – نعتبر النقطتين : $C(1;-2)$ و $E(a;-4)$ بحيث a عدد حقيقي.

أوجد العدد الحقيقي a إذا علمت أن الرباعي ABCE متوازي الأضلاع.

4) – ميل مستقيم معرف بنقطتين مختلفتين:

مدخل

لنعتبر الدالة التآلفية f التي تمثيلها المبياني هو المستقيم (AB) حيث : $A\left(x_A;y_A\right)$ و $B\left(x_B;y_B\right)$

إذن f(x)=ax+b

وبالتالي : $\begin{cases} f(x_A)=ax_A+b=y_A \\ f(x_B)=ax_B+b=y_B \end{cases}$

لنحسب : $\dfrac{f(x_A)-f(x_B)}{x_A-x_B}$

لدينا $\dfrac{f(x_A)-f(x_B)}{x_A-x_B}=\dfrac{(ax_A+b)-(ax_B+b)}{x_A-x_B}=\dfrac{ax_A-ax_B}{x_A-x_B}=\dfrac{a(x_A-x_B)}{(x_A-x_B)}=a$

أي $\dfrac{f(x_A)-f(x_B)}{x_A-x_B}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=a$

خاصية :

إذا كانت $A\left(x_A;y_A\right)$ و $B\left(x_B;y_B\right)$ نقطتين مختلفتين بحيث $x_A\neq x_B$

فإن ميل المستقيم (AB) هو العدد : $\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$.

تمرين5

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

نعتبر المستقيم (D) ذو المعادلة : $y-2x-3=0$.

1) – حدد ميل المستقيم (D) .

2) – بين أن النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى المستقيم (D) .

3) – هل المستقيم (L) ذو المعادلة : $y=2x-5$ مواز للمستقيم (D) ؟.

4) – حدد ا لمعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) المار من النقطة $B(2;3)$ و العمودي على المستقيم (D) .

5) – نعتبر النقط : $C(2;1)$ و $E(1;-2)$ و $F(0;-5)$.

أ) -- أوجد المعادلة المختصرة للمستقيم (EC) ثم حدد ميله.

ب) -- أثبت أن النقط C و E و F مستقيمية.

تمرين6

المستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم $(O;I;J)$.

تطبيـقات :

أ – تحديد المعادلة المختصرة لمستقيم معرف بنقطتين :

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) بحيث : $A(1;-2)$ و $B(-2;3)$.

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) على شكـل : $(AB): y = mx + p$.

لنحدد m :

لدينا : $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-3}{1+2} = \frac{-5}{3}$

إذن : $(AB): y = \frac{-5}{3}x + p$.

لنحدد p :

بما أن النقطة $A(1;-2)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) فإن :

1) – أنشئ النقط : $A(2;2)$ و $B(0;-1)$ و $C(-3;4)$.

2) – حدد معادلة للمستقيم (K) المار من C و العمودي على المستقيم (AB) .

3) – حدد معادلة للمستقيم (L) المار من C و الموازي للمستقيم (AB) .

تمرين7

نعتبر (Δ) مستقيما معادلته : $2x - 3y - 12 = 0$.

1) – حدد إحداثيتي النقطة E تقاطع (Δ) ومحور الأفاصيل.

2) – حدد إحداثيتي النقطة F تقاطع (Δ) ومحور الأراتيب.

3) – أنشئ المستقيم (Δ) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

4) – حدد معادلة للمستقيم (L) المار من النقطة $A(3;-2)$ و الموازي للمستقيم (Δ) .

5) – حدد معادلة للمستقيم (K) المار من النقطة $B(-5;2)$ و العمودي على المستقيم (Δ).

$$-2=\frac{-5}{3}\times 1+p$$

$$-2=\frac{-5}{3}+p$$

$$p=-2+\frac{5}{3}$$

$$p=\frac{-6+5}{3}$$

$$p=\frac{-1}{3}$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي : $(AB):y=\frac{-5}{3}x-\frac{1}{3}$

ب – تحديد المعادلة المختصرة لمستقيم معرف بميله و بنقطة يمر منها :

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) ميله 3 و يمر من النقطة $E(2;-1)$.

لدينا معادلة المستقيم (Δ) على شكل : $(\Delta):y=3x+p$.

لنحدد p :

6) – استنتج الوضع النسبي للمستقيمين (L) و (K) .

تمرين8

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

نعتبر المستقيم (D) ذا المعادلة : $y-2x-3=0$.

1) – حدد ميل المستقيم (D) .

2) – أثبت أن النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى المستقيم (D) .

3) – هل المستقيم (L) ذو المعادلة : $y=2x-5$ موازٍ للمستقيم (D) .

4) – حدد معادلة للمستقيم (Δ) المار من النقطة $B(2;3)$ و العمودي على المستقيم (D) .

5) – نعتبر النقط : $C(2;1)$ و $E(1;-2)$ و $F(0;-5)$.

أ) -- أوجد المعادلة المختصرة للمستقيم (EC) ثم حدد ميله.

ب) -- أثبت أن النقط C و E و F مستقيمية.

بما أن النقطة $E(2;-1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإن :

$$-1 = 3\times 2 + p$$
$$-1 = 6 + p$$
$$p = -1 - 6$$
$$p = -7$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta) : y = 3x - 7$

5) – حالات خـاصة

- المعادلة المختصرة لمستقيم (D) مار بنقطة معلومة A و يوازي محور الأفاصيل هي : $y = y_A$.
  - جميع النقط التي تنتمي إلى المستقيم (D) لها نفس الأرتوب y_A .
- معادلة مستقيم (Δ) مار بنقطة معلومة A و يوازي محور الأراتيب هي : $x = x_A$.
  - جميع النقط التي تنتمي إلى المستقيم (Δ) لها نفس الأفصول x_A
  - المعادلة المختصرة لمحور الأفاصيل هي y=0x+0

تمرين9

نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

1) – أنشئ النقط : $A(2;-3)$ و $B(0;3)$ و $C(-4;0)$.

2) – أحسب إحداثيتي E و F و G منتصفات [AB] و [AC] و [BC] على التوالي .

3) – حدد معادلة مختصرة لكـل من المستقيمات (AE) و (BF) و (CG) .

4) – حدد معادلة للمستقيم (D) المار من النقطة B والموازي للمستقيم (AE) .

5) – حدد معادلة للمستقيم (Δ) المار من النقطة C والعمودي على المستقيم (CG) .

6) – (D) مستقيم معرف بمعادلته :
$(2-k)x + (2k-1)y + 5 - 2k = 0$ بحيث k عدد حقيقي.

حدد قيمة K إذا علمت أن ميل المستقيم (D) هو 5 .

II التوازي والتعامد :

1) – توازي مستقيمين :

مدخل

ليكن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O;I;J) ، (D) و (D') مستقيمان متوازيان يخالفان (OJ)
حيث: (D) : y = mx+p و (D'): y =m'x+p'
1) بين أن للمستقيمين (D) و (D') نفس الميل
2) لنعتبر المستقيم (D") حيث له نفس ميل المستقيم (D') ؛ (D") : y =m'x+p"
بين أن (D') و (D") متوازيان
3) تذكر خاصية

- إذا كان مستقيمان متوازيين فإن لهما نفس الميل .
- إذا كان لمستقيمين نفس الميل فإنهما يكونان متوازيين .

تطبيق :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستقيم (D) معادلته المختصرة هي :

$$(D): y = 2x - 1$$

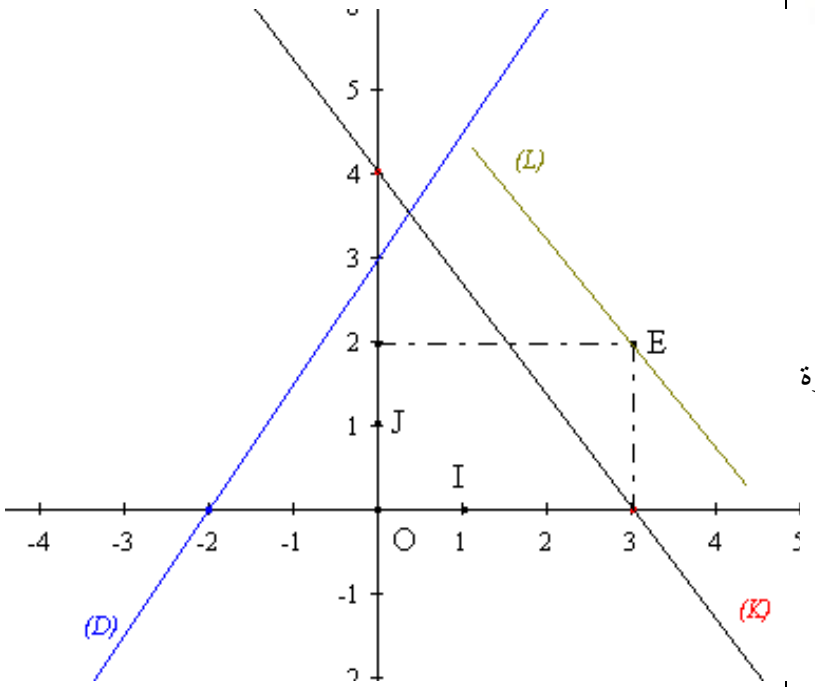
حدد معادلة المستقيم (Δ) المار من النقطة $A(-1;2)$ و الموازي للمستقيم (D).

الحل

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta): y = mx + p$.

تمرين10

لاحظ الشكل الآتي بحيث المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.



بما أن $(D) // (\Delta)$ فإن : $m = 2$.

إذن : $(\Delta) : y = 2x + p$.

و بما أن $A \in (\Delta)$ فإن :

$$2 = 2 \times (-1) + p$$
$$2 = -2 + p$$
$$p = 2 + 2$$
$$p = 4$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta) : y = 2x + 4$

1) – حدد معادلة مختصرة لكـل من المستقيمين (D) و (K) .

2) – حدد معادلة المستقيم (L) إذا علمت أن (L) // (K) .

2) – تعامـد مستقيمين :

مدخل

نشاط 1

ليكن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$

(D) و (D') مستقيمان حيث: $(D): y = 2x+1$

$(D'): y = mx+2$ و جداء ميلي (D) و (D') يساوي -1

1) بين أن (D) و (D') متعامدان

2) ماذا تلاحظ؟

نشاط 2

ليكن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$

(D) و (D') مستقيمان متعامدان حيث: $(D) : y = 5x - 7$ و $A(2;3)$ نقطة تعامدهما

1) حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D')

2) ماذا تلاحظ ؟

خاصية

- إذا كان مستقيمان متعامدين فإن جداء ميليهما يساوي -1 .
- إذا كان جداء ميلي مستقيمين يساوي -1 فإنهما يكونان متعامدين .

تطبيق :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستقيم (D) معادلته المختصرة

هي :

$$(D): y = 2x - 1$$

حدد معادلة المستقيم (Δ) المار من النقطة $A(-1;2)$ و الموازي للمستقيم (D).

<u>الحل</u>

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta): y = mx + p$.

بما أن $(D) \perp (\Delta)$ فإن :

$$m \times 2 = -1$$
$$m = \frac{-1}{2}$$

إذن : $(\Delta): y = \frac{-1}{2}x + p$.

و بما أن $A \in (\Delta)$ فإن :

	$2=\frac{-1}{2}\times(-1)+p$ $2=\frac{1}{2}+p$ $p=2-\frac{1}{2}$ $p=\frac{3}{2}$ و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta):y=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}$

	عنوان الدرس : النظمات المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 10 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ومعادلة مستقيم المعادلات بمجهول واحد المسائل	حل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين مبيانيا. حل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين جبريا. ترييض وضعيات تؤول في حلها إلى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.	يتم الربط بين حل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين ومعادلة مستقيم. يعتمد في حل النظمات على طريقتي التعويض والتأليفة الخطية. ينبغي الحرص على توظيف حل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين في وضعيات مستقاة من الواقع المعيش أو من مواد دراسية أخرى.

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية

I) نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

1)مدخل

لنعتبر عددين حقيقيين مجموع ضعف الأول مع ثلث الثاني يساوي 2 . وفرق الأول مع ضعف الثاني يساوي 6

لنضع x العدد الأول و y العدد الثاني

إذن يمكن ترجمة هذه المسألة إلى الكتابة التالية :

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{3}y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

نقول هذه الكتابة التي توصلنا إليها هي لنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y

2) تعريف

نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين تكتب على الشكل التالي :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

a و b و c و a' و b' و c' أعداد حقيقية معلومة

x و y عددان حقيقيان مجهولان

تمرين 1

حـل مبيانيا النظمات الآتية :

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -x - y = -1 \end{cases} \quad ;; \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 6y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$;; \quad \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} \\ 3x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

تمرين 2

حـل باستعمال طريقة التعويض النظمات الآتية :

$$\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ x + y = -2 \end{cases} \quad ;; \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2 + 2y = 4x \end{cases} \quad ;;$$

$$\begin{cases} x + 3y + 2 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad ;; \quad \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

II) حل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

1) مدخل

حل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين xوy يعني إيجاد قيمة الزوج (x ;y) التي تحقق المتساويتان معا.

ولحل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى طريقتين

الأولى تسمى: الحل المبياني

الثانية تسمى: الحل الجبري ويتفرع مه طريقتين

طريقة التعويض طريقة التأليفة الخطية

2)أمثلة

❖ الحل المبياني

لنحـل النظمة : $(S):\begin{cases}4x-y-2=0\\2x-y+2=0\end{cases}$

ليكن (D_1) المستقيم الذي معادلته : $4x-y-2=0$.

ليكن (D_2) المستقيم الذي معادلته : $2x-y+2=0$.

لنحدد المعادلة المختصر لكل من المستقيمين (D_1) و (D_2).

$\begin{cases}2x+1=2y-1\\3-x=2-y\end{cases}$;;

$\begin{cases}3x-2y+8=x-y+5\\2x+2y=0\end{cases}$;;

$\begin{cases}x+3y=y-3x+1\\-x-y=0\end{cases}$

تمرين 3

حـل باستعمال طريقة التأليفة الخطية النظمات الآتية :

$\begin{cases}3x-2y=4\\x+2y=0\end{cases}$;; $\begin{cases}-5x-7y=-4\\5x+3y=10\end{cases}$

$\begin{cases}x+4y=3\\3x+4y=-6\end{cases}$;; $\begin{cases}3x+y=2\\3x+2y=5\end{cases}$

$\begin{cases}2x+y=-7\\x+2y=1\end{cases}$;; $\begin{cases}3x+y=2\\-x-2y=5\end{cases}$;;

$\begin{cases}x+y=12\\2x+2y=6\end{cases}$;; $\begin{cases}-2x-2y=-2\\x+y=1\end{cases}$

لدينا :

$$\begin{cases}(D_1): y = 4x - 2\\(D_2): y = 2x + 2\end{cases}$$

نلاحظ أن المستقيمين (D_1) و (D_2) ليس لهما نفس الميل ، إذن فهما مستقيمان متقاطعان .

و بالتالي للنظمة حـلا وحيدا هو زوج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) .

لتكن $M(x_M ; y_M)$ نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2). لنحدد زوج إحداثيتي M .

نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

لننشئ المستقيمين (D_1) و (D_2).

تمرين 4

حـل النظمات الآتية :

$$\begin{cases}4x - 3y = -1\\9x - 5y = 3\end{cases} \quad ;; \quad \begin{cases}2x - 3y = 7\\-x - 5y = 3\end{cases} \quad ;;$$

$$\begin{cases}5x - 3y + 1 = 0\\-x + 2y - 2 = 0\end{cases} \quad ;;$$

$$\begin{cases}3x + 2y = 1\\7x + 5y = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x + 3y = 12\\2x + y = 3\end{cases} \quad ;; \quad \begin{cases}3x + y = -1\\x + 2y = 8\end{cases} \quad ;;$$

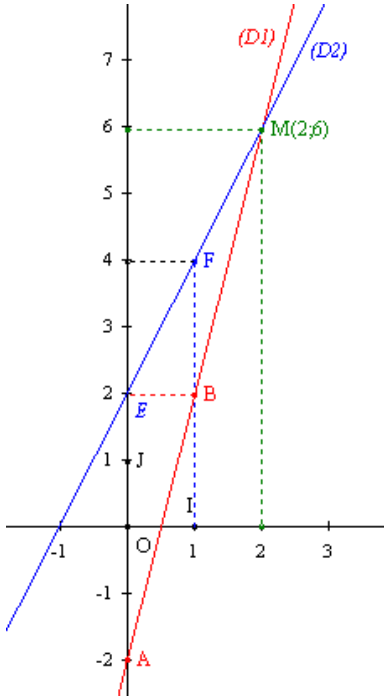
$$\begin{cases}7x - y = -5\\3x + 2y = 3\end{cases} \quad ;; \quad \begin{cases}-x + y = -5\\5x - 2y = 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}5x - 3y = 1\\x + 2y = -5\end{cases} \quad ;; \quad \begin{cases}3x + 2y = 3\\2x + y = -4\end{cases} \quad ;;$$

$$\begin{cases}4x - y = 3\\x + y = -2\end{cases}$$

	(D_1)	
x	0	1
y	-2	2
$M(x;y)$	$A(0;-2)$	$B(1;2)$

	(D_2)	
x	0	1
y	2	4
$M(x;y)$	$E(0;2)$	$F(1;4)$



نلاحظ من خلال المبيان أن : $M(2;6)$

و بالتالي الزوج $(2;6)$ هو حـل النظمة (S) .

تمرين 5

يوجد في قسم من أقسام الثالثة إعدادي 42 تلميذا وتلميذة.

إذا ضربنا عدد التلاميذ في 2 وعدد التلميذات في 5 أصبح فرقهم 35 .

كـم عدد التلاميذ و كـم عدد التلميذات بهذا القسم ؟

تمرين 6

حديقة مستطيلة الشكـل محيطها يساوي 220 m .

إذا طرحنا من عرضها النصف و أضفنا إلى طولها الربع أصبح محيطها 200 m .

فما هما إذن بعدا هذه الحديقة ؟

* / ملاحظــة هامة :

-- إذا كان للمستقيمين نفس الميل نقول أنهما متوازيان قطعا و أن النظمة ليس لها حــل .

-- إذا كان للمستقيمين نفس الميل و نفس الأرتوب عند الأصل نقول أنهما متوازيان منطبقان و أن ما لانهاية من الأزواج حلول للنظمة .

❖ الحــل الجبري لنظمة معادلتين :

➢ طريقة التعويض :

لنحــل النظمة : (E) : $\begin{cases} 2x + y = 11 & (1) \\ x + 3y = 18 & (2) \end{cases}$

في المعادلة (1) نحسب y بدلالة x . إذن : $y = 11 - 2x$.

في المعادلة (2) نعوض y بالقيمة $11 - 2x$ ثم نحسب x. إذن :

$$x + 3(11 - 2x) = 18$$
$$x + 33 - 6x = 18$$
$$x - 6x = 18 - 33$$
$$-5x = -15$$
$$x = \frac{-15}{-5}$$
$$x = 3$$

تمرين 7

اشترى كتبي صنفين من الكتب A و B, مجموعها 23 كتابا.

ثمن الصنف A 20 درهما للكتاب الواحد و ثمن الصنف B 17,5 درهما للكتاب الواحد

و بلغ ثمن جميع هذه الكتب 435 درهما .

ما هو عدد كتب كــل صنف ؟

تمرين 8

يريد تلميذ أن يشتري كتبا لها نفس الثمن و دفاتر لها نفس الثمن.

إذا علمت أن ثمن 5 كتب و 7 دفاتر هو 87 درهما و أن ثمن 8 كتب و 4 دفاتر هو 114 درهما

فما هو ثمن البكتاب الواحد و ثمن الدفتر الواحد ؟

و منه فإن :

$$y = 11 - 2\times 3$$
$$y = 11 - 6$$
$$y = 5$$

و بالتالي الزوج $(3;5)$ هو حـل هذه النظمة (E) .

➢ طريقة التآلفية الخطية :

لنحـل النظمة : $(F) : \begin{cases} (1) & 2x + 3y = 5 \\ (2) & 5x + 6y = 14 \end{cases}$

بضرب طرفي المعادلة (1) في العدد -2 نحصل على النظمة : $\begin{cases} -4x - 6y = -10 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$

بجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف نحصل على :

$$-4x - 6y + 5x + 6y = -10 + 14$$
$$-4x + 5x - 6y + 6y = 4$$
$$x = 4$$

تمرين 9

حدد عددين حقيقيين مجموعهما يساوي 711 و فرقهما يساوي 353 .

تمرين 10

اشترى فلاح نوعين من الخرفان : السردي و البركي

في المرة الأولى اشترى 74 خروفا سرديا و 110 خروفا بركيا بثمن 3384 درهما.

في المرة الثانية اشترى 90 خروفا سرديا و 52 خروفا بركيا بثمن 2480 درهما.

أحسب ثمن الخروف الواحد من كـل صنف

بضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 5 و طرفي المعادلة (2) في العدد 2 – نحصل على النظمة :

$$\begin{cases} 10x + 15y = 25 \\ -10x - 12y = -28 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف نحصل على :

$$\begin{aligned} 10x + 15y - 10x - 12y &= 25 - 28 \\ 10x - 10x + 15y - 12y &= -3 \\ 3y &= -3 \\ y &= \frac{-3}{3} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

و بالتالي الزوج $(4;-5)$ هو حـل النظمة (F).

III _ مسائل تؤول في حلها إلى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين .

1) – قاعدة :

لحـل مسألة نتبع المراحل التالية :

-- اختيار المجهولين .

-- صياغة النظمة .

-- حـل النظمة (جبريا).

-- التحقق من الحـل .

-- الرجوع إلى المسألة .

2) – مثـال :

ساهمت مجموعة تتكون من 20 فردا (أساتذة و تلاميذ)، في شراء مجموعة من الكتب لخزانة المدرسة بثمن 320 درهما .

إذا علمت أن كل أستاذ ساهم ب 30 درهم و أن كل تلميذ ساهم ب 10 دراهم، فما هو إذن عدد الأساتذة و ما هو عدد التلاميذ المساهمين ؟

➢ اختيار المجهولين :

ليكن x هو عدد التلاميذ المساهمين و y هو عدد الأساتذة المساهمين .

➢ صياغة النظمة :

عدد الأفراد الذين ساهموا هو 20 فردا من بينهم أساتذة و تلا ميذ ، إذن : $x + y = 20$.

ساهم كل أستاذ ب 30 درهم و ساهم كل تلميذ ب 10 دراهم بحيث

مجموع كل مساهماتهم يساوي 320 درهما

، إذن : $10x + 30y = 320$.

إذن النظمة هي : $\begin{cases} x + y = 20 \\ 10x + 30y = 320 \end{cases}$.

➢ حـل النظمة :

باتباع إحدى الطريقتين المذكرتين أعلاه نحصل على : $x = 14$ و $y = 6$.

➢ التحقق من الحــل :

لدينا : $14+6=20$ و $10\times14+30\times6=140+180=320$.

إذن الزوج $(14;6)$ هو حــل النظمة أعلاه .

➢ الرجوع إلى المسألــة :

عدد التلاميذ هو : 14 .

عدد الأساتذة هو : 6 .

دادة	عنوان الدرس : الدالة الخطية الدالة التآلفية المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 14 ساعة من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
التناسب االمعادلات الدالة الخطية المعلم في المستوى تمثيل نقطة معرفة بإحداثيتيها	التعرف على وضعية تناسبية وترجمتها إلى الصيغة: $f(x) = ax$ تحديد صورة عدد بدالة خطية. إنشاء التمثيل المبياني لدالة خطية. تحديد صورة عدد بدالة خطية من خلال تمثيلها المبياني. تحديد عدد صورته معلومة من خلال التمثيل المبياني لدالة خطية. تحديد صيغة دالة خطية انطلاقا من عدد غير منعدم وصورته. تحديد صيغة دالة خطية انطلاقا من نقطة مخالفة لأصل المعلم من تمثيلها المباني. قراءة التمثيل المبياني لدالة خطية. تحديد صورة عدد بدالة تآلفية. ترجمة وضعية إلى الصيغة $f(x) = ax + b$ إنشاء التمثيل المبياني لدالة تآلفية. تحديد صورة عدد بدالة تآلفية من خلال تمثيلها المبياني. تحديد عدد صورته معلومة من خلال التمثيل المبياني لدالة تآلفية. تحديد صيغة دالة تآلفية انطلاقا من نقطتين مختلفتين من تمثيلها المبياني. قراءة التمثيل المبياني لدالة تآلفية. توظيف اللدالة التآلفية في حل مسائل	الاعتماد على دراسة وضعيات في التناسب تعرض لها التلاميذ في الأقسام السابقة لتحديد معامل التناسب وإبراز علاقة خطية بين متغيرين ثم تقديم الدالة الخطية. إدخال الكتابة : $x \to ax$ تناول بعض المفردات الخاصة بالدوال. يمكن أن نلاحظ تغيرات x و y والتذكير بالنتيجة : $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = a$ عند دراسة معادلة مستقيم . يجب توظيف الدالة التآلفية في حل مسائل متنوعة. اقتراح أمثلة يكون فيها التمثيل المبياني ليس مستقيما (علاقة مساحة شكل مربع بضلع متغير) عدم الإفراط في تحديد صيغة دالة خطية أو تآلفية انطلاقا من إعطاء أعداد وصورها أو نقطتين من تمثيلها.

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية

I _ الدالة الخطيــة :

مدخل:

لنعتبر الجدول التالي:

x	...	18	17	16	15	14	13	-2	9	7	6	5	4	-3,5	2	1	-7
y	...	54	51	48	45	42	39	-6	27	21	18	15	12	-10.5	6	3	-21

نلاحظ أن أعداد السطر الأول متناسبة مع أعداد السطر الثاني حيث معامل التناسب هو 3

إذن Y=3x

نقول العلاقة التي تربط أعداد السطر الأول بأعدا **تمرين 3** سمى دالة خطية ونرمز لها بالرمز :
fأوgأوh أو...

ونكتب : f(x) = 3x وتقرأ هذه المتساوية : العدد 3x هو صورة العدد x بالدالة الخطية f

ويسمى العدد 3 بمعامل الدالة الخطية f

تمرين1

نعتبر f دالة خطية بحيث : $f(x)=\frac{1}{2}x$.

1) – أحسب : $f(0)$;; $f(1,5)$;; $f(-\sqrt{2})$.

2) – أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

تمرين2

حدد معامل الدالة الخطية h في كل حالة من الحالات الآتية :

$h(0)=0$;; $h\left(-\frac{1}{2}\right)=3$;;

1) – تعريف :

a عدد حقيقي معلوم

العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي ax

تسمى دالة خطية معاملها a

و نكتب :

$f(x)=ax$ أو $f:x\to ax$

العدد ax يسمى صورة x بالدالة الخطية f

2) – أمثلة :

f و g و h دوال معرفة كما يلي :

$$f(x)=\frac{x}{3} \quad \text{و} \quad g(x)=0x \quad \text{و} \quad h(x)=-\sqrt{5}x$$

إذن :

-- f دالة خطية معاملها العدد $\frac{1}{3}$.

-- g دالة خطية معاملها العدد 0.

-- h دالة خطية معاملها العدد $-\sqrt{5}$

$$h(5)=-\frac{2}{3}$$

$$h(\sqrt{2})=1 \quad ;; \quad h(-1)=-\sqrt{3} \quad ;;$$

$$h(7)=\frac{1}{7}$$

تمرين3

نعتبر f دالة خطية معاملها $\frac{2}{3}$.

1) – أحسب : $f(-5)$ و $f(3)$ و $f(0)$ و $f\left(\frac{2}{4}\right)$.

2) – عرف f ثم أنشئ (D) تمثيلها المبياني في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

3) – خـاصيـة :

مدخل

لتكن f دالة خطية . m عدد حقيقي مختلف عن صفر

إذن f(x)=ax

وبالتالي f(m)=am

إذن

$$\frac{f(m)}{m}=\frac{am}{m}=a$$

وحيث a هو معامل الدالة الخطية f

فإن البحث عنه سيتطلب المراحل التي مررنابها

خاصية

إذا كانت f دالة خطية و m عدد حقيقي غير منعدم فإن :

معامل الدالة f هو العدد الحقيقي : $\frac{f(m)}{m}$

تمرين4

دالة خطية معرفة كما يلي : $f(x)=\frac{2}{3}x$.

أثبت أن : $f(x+y)=f(x)+f(y)$

تمرين تطبيقي :

f دالة خطية بحيث : $f(-5)=\frac{2}{3}$

حدد معامل الدالة f ثم حدد $f(x)$.

الحـل :

لدينا :

f دالة خطية إذن : $f(x)=ax$ ومعاملها هو العدد الحقيقي :

$$a=\frac{f(-5)}{-5}=\frac{\frac{2}{3}}{-5}=\frac{2}{3}\times\frac{-5}{1}=\frac{-10}{3}.$$

و منه فإن : $f(x)=\frac{-10}{3}x$.

4) – التمثيل المبياني لدالة خطية :

مدخل

لنعتبر المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (I ;I ;J) . ولتكن الدالة الخطية f حيث: f(x) = 1,5x

وتكن M(x ;f(x)) نقطة ما في المستوى ، وكلما تغير مكان M في المستوى فإن زوج إحداثيتيها سيتغير

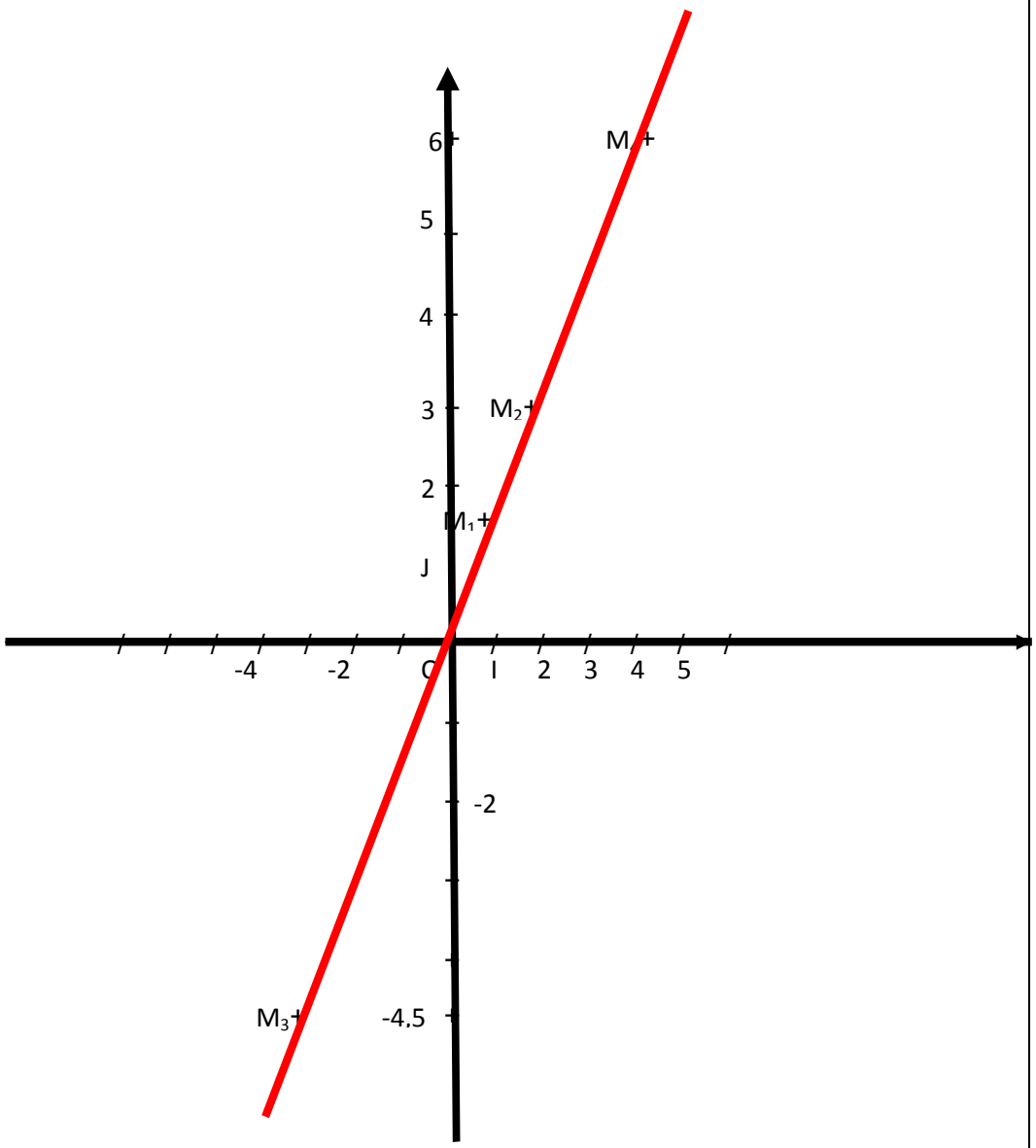
وهذا جدول توضيحي:

x	1	2	0	-3	4	a
f(x)	1,5	3	0	-4,5	6	1,5a
M(x ;f(x))	$M_1(1 ;1,5)$	$M_2(2 ;3)$	O(0 ;0)	$M_3(-3 ;-4,5)$	$M_4(4 ;6)$	$M_n(a ;1,5a)$

لننشئ النقط الواردة في الجدول ، ثم فلنتضنن موقع جميع النقط الممكنة الغير الواردة في الجدول .

التمثيل المبياني:

الشكل الهندسي:



نلاحظ أن جميع النقط الواردة في الجدول نقط مستقيمية ، وبالتالي يمكننا أن نتضنن أن جميع النقط الأخرى الممكن تحديدها ستقع على نفس المستقيم الذي يحتوي على النقط الأولى .($O ;M_1 ;M_2 ;M_3 ;M_4$)

نقول : هذا المستقيم يسمى بالتمثيل المبياني للدالة الخطية f ونرمز له بالرمز (C_f)

تعريف :

$(O;I;J)$ معلم متعامد ممنظم منسوب للمستوى

التمثيل المبياني لدالة خطية هو مستقيم يمر من أصل المعلم O .

تمرين تطبيقي:

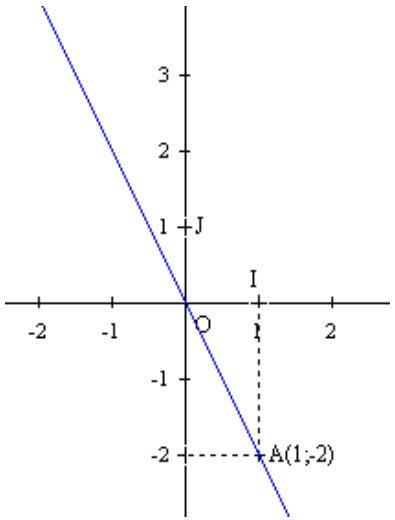
f دالة خطية معرفة كما يلي : $f(x) = -2x$.

لننشئ التمثيل المبياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

الحل

لنضع الجدول التالي

x	1
$f(x)$	-2
A	(1 ;-2)



إذن التمثيل المبياني للدالة f هو المستقيم المار من O و من النقطة $A(1;-2)$.

* / ملاحظة هامة :

-- إذا كانت $M(x;y)$ نقطة تنتمي إلى التمثيل المبياني

لدالة خطية f فإن : $f(x)=y$.

-- إذا كانت M نقطة تنتمي إلى التمثيل المبياني لدالة خطية f فإن :

$M(x;f(x))$.

II _ الدالة التآلفيـــة

مدخل

لنعتبر الجدول التالي:

x	...	18	17	16	15	14	13	-2	9	7	6	5	4	-3,5	2	1	-7
y	...	37	35	33	31	29	27	-3	19	15	13	11	9	-6	5	3	-13

نلاحظ أن أعداد السطر الأول غير متناسبة مع أعداد السطر الثاني

إذن y=2x+1

نقول العلاقة التي تربط أعداد السطر الأول بأعداد السطر الثاني تسمى دالة تآلفية ونرمز لها بالرمز : fأوgأوh أو...

ونكتب : f(x) = 2x+1 وتقرأ هذه المتساوية : العدد 2x+1 هو صورة العدد x بالدالة التآلفية f

ويسمى العدد 2 بمعامل الدالة التآلفية f

1) تعريف :

a و b عددان حقيقيان معلومان .

العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $ax+b$

تسمى دالة تآلفية معاملها a و نكتب :

$f(x)=ax+b$ أو $f:x\to ax+b$

العدد $ax+b$ يسمى صورة x بالدالة الخطية f

تمرين5

f دالة خطية و g دالة تآلفية بحيث :

$f(x)=-3x$ و $g(x)=f(x)-1$

1) – أكتب $g(x)$ بدلالة x .

2) – أحسب : $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ و $g\left(\frac{3}{2}\right)$.

3) – أنشئ التمثيلين المبيانيين لكل من f و g على نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;I;J)$.

تمرين6

نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

$A(2;3)$ و $B(-1;2)$ و $C(-3;-1)$ نقط من المستوى.

1) – عر ف الدالة التآلفية f التي تمثيلها المبياني يمر من $A(2;3)$ و $B(-1;2)$.

2) أمثلة :

f و g دالتان معرفتان كما يلي :

$$g(x)=5 \quad \text{و} \quad f(x)=-\frac{x}{7}+11$$

-- f دالة تآلفية معاملها $-\frac{1}{7}$.

-- g دالة تآلفية معاملها 0 .

3) – خـاصيـة :

مدخل

لتكن f دالة تآلفية . m و n عددان حقيقيان مختلفان يخالفان صفر

إذن f(x)=ax+b

وبالتالي f(m)=am+b و f(n)=an+b

إذن

$$\frac{f(m)-f(n)}{m-n}=\frac{(am+b)-(an+b)}{m-n}=\frac{am+b-an-b}{m-n}=\frac{am-an}{m-n}=\frac{a(m-n)}{(m-n)}=a$$

وحيث a هو معامل الدالة التآلفية f

فإن البحث عنه سيتطلب المراحل التي مررنابها

2) – عرف الدالة التآلفية g التي تمثيلها المبياني يمر من $B(-1;2)$ و $C(-3;-1)$.

3) – عرف الدالة التآلفية h التي تمثيلها المبياني يمر من $A(2;3)$ و $C(-3;-1)$.

4) – أنشئ على نفس المعلم التمثيل المبياني لكل من الدوال f و g و h.

تمرين7

نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

لتكن f دالة تآلفية بحيث : $f(x)=\frac{1}{2}x-1$.

أنشئ النقط : $A(-2;f(0))$ و

خاصية

إذا كانت f دالة تآلفية . m وn عددان حقيقيان مختلفان غير منعدمين فإن :

معامل الدالة f هو العدد الحقيقي : $\dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}$

تمرين تطبيقي :

f دالة تآلفية بحيث : $f(2)=2$ و $f(-1)=-3$

حدد معامل الدالة f ثم حدد $f(x)$.

الحـل :

لدينا f دالة تآلفية إذن : $f(x)=ax+b$ و معاملها هو العدد الحقيقي :

$$a=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{2-(-3)}{2-(-1)}=\frac{2+3}{2+1}=\frac{5}{3}$$

$B\left(f(-2);4\right)$ و $C\left(f(-5);f(\frac{3}{2})\right)$.

تمرين8

f دالة تآلفية و (Δ) التمثيل المبياني لها بحيث : $f(x)=ax+b$.

لتكن $M(-2;3)$ و $N(5;-4)$ نقطتين من (Δ) .

1) – أثبت أن : $a=-1$.

2) – عرف الدالة f.

3) – أنشئ التمثيل المبياني للدالة f.

تمرين9

لتكن f و g دالتين تآلفيتين معرفتين كما يلي :

$f(x)=2x-1$ و $g(x)=2x+2$

و منه فإن : $f(x)=\frac{5}{2}x+b$.

لنحسب العدد الحقيقي b .

$f(-1)=-3$ يعني أن :

$$\frac{5}{2}(-1)+b=-3$$
$$-5+2b=-6$$
$$2b=-6+5$$
$$2b=-1$$
$$b=\frac{-1}{2}$$

وبالتالي فإن : $f(x)=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$.

4) – التمثيل المبياني لدالة تآلفية :

مدخل

لنعتبر المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (J; I; I) . ولتكن الدالة التآلفية f حيث: f(x)=1,5x+1

1) – أنشئ (D) و (Δ) التمثيلين المبيانيين لكل من f و g على التوالي في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

2) – حـل مبيانيا ثم جبريا المعادلة : $f(x)=g(x)$.

3) – حـل مبيانيا المتراجحة : $f(x)\leq g(x)$.

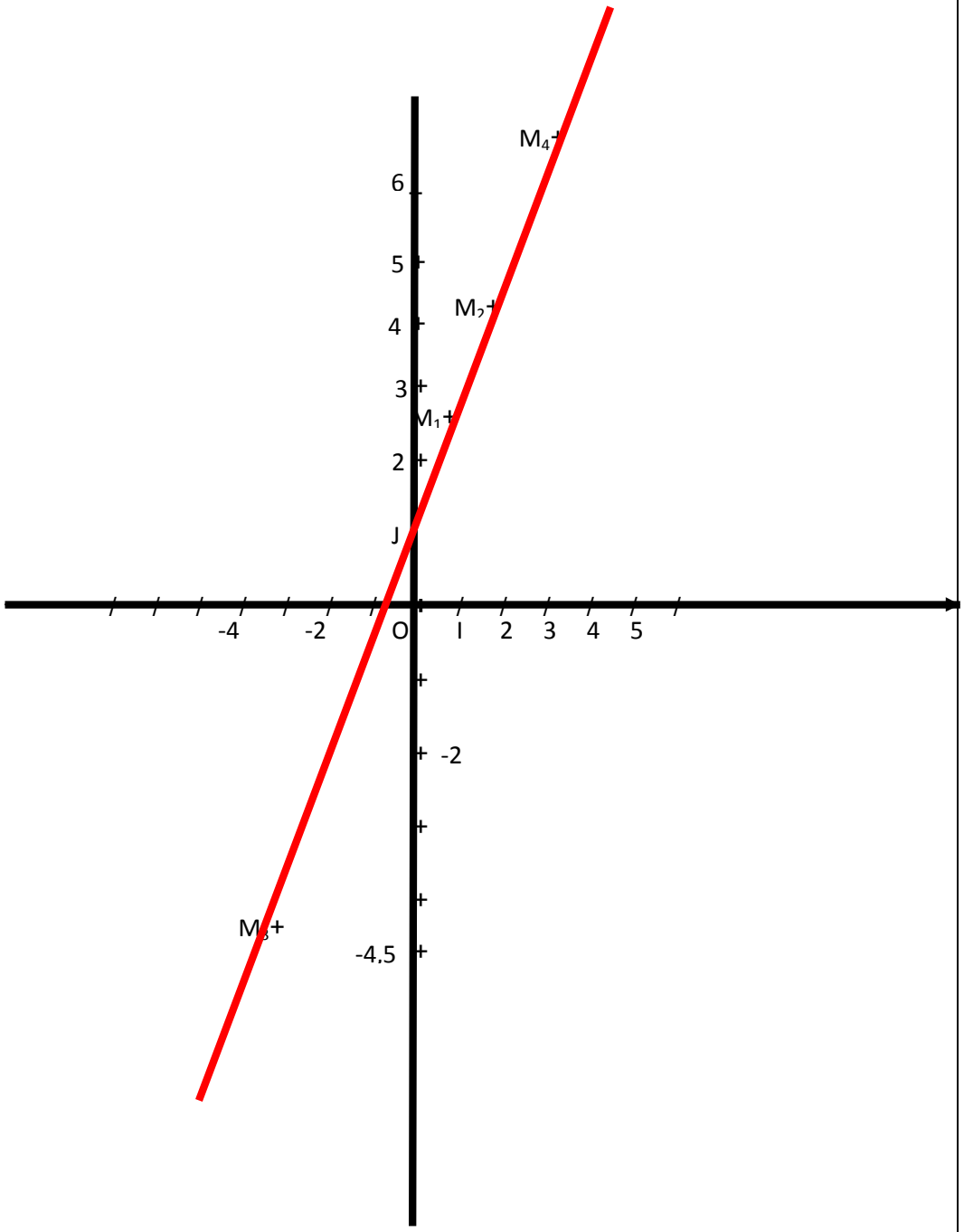
ولتكن $M(x ;f(x))$ نقطة ما في المستوى ، وكلما تغير مكان M في المستوى فإن زوج إحداثيتيها سيتغير

وهذا جدول توضيحي:

x	1	2	0	-3	4	a
f(x)	2,5	4	1	-3,5	7	1,5a+1
M(x ;f(x))	$M_1(1 ;2,5)$	$M_2(2 ;4)$	J(0 ;1)	$M_3(-3 ;-3,5)$	$M_4(4 ;7)$	$M_n(a ;1,5a+1)$

لننشئ النقط الواردة في الجدول ، ثم فلنتضنن موقع جميع النقط الممكنة الغير الواردة في الجدول .

التمثيل المبياني



نلاحظ أن جميع النقط الواردة في الجدول نقط مستقيمية ، وبالتالي يمكننا أن نتضنن أن جميع النقط الأخرى الممكن تحديدها ستقع على نفس المستقيم الذي يحتوي على النقط الأولى .($M_1;M_2;M_3;M_4$)

نقول : هذا المستقيم يسمى بالتمثيل المبياني للدالة التآلفية f ونرمز له بالرمز(C_f)

تعريف :

$(O;I;J)$ معلم متعامد ممنظم منسوب للمستوى

التمثيل المبياني لدالة تآلفية هو مستقيم يمر من نقطتين مختلفتين

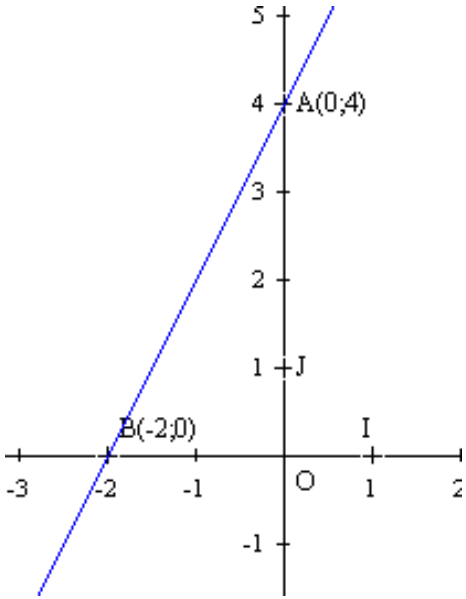
$A(m;f(m))$ و $B(n;f(n))$

تمرين تطبيقي :

دالة التآلفية بحيث : $f(x) = 2x + 4$.

لننشئ التمثيل المبياني للدالة fفي المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$

الحل



لنضع الجدول التالي

x	0	-2
$f(x)$	4	0
	A(0;4)	B(-2;0)

إذن التمثيل المبياني للدالة التآلفية f هو المستقيم (AB) بحيث :

$A(0;4)$ و $B(-2;0)$

5) – حـالة خـاصة :

a عدد حقيقي معلوم

الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=a$ تسمى دالة تآلفية معاملها 0

و تمثيلها المبياني هو المستقيم المار من النقطة $A(0;a)$ و الموازي لمحور الأفاصيل

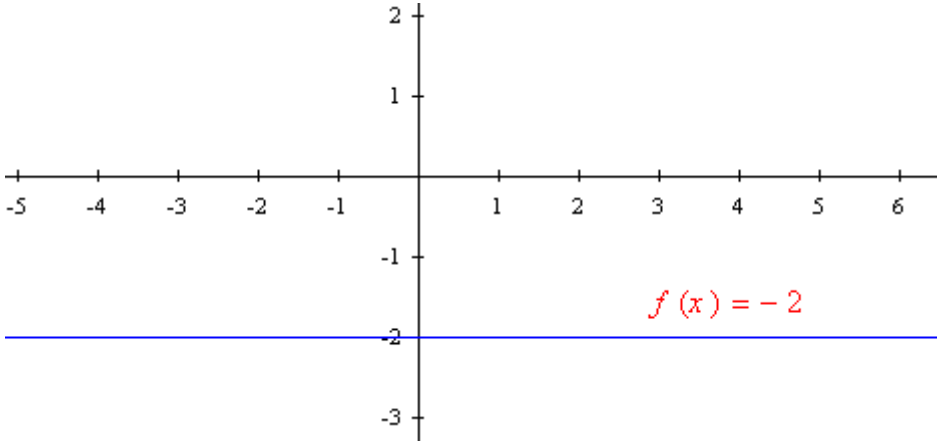
.

* / مثال :

لننشئ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$، الدالة التآلفية f

بحيث :

$$.f(x) = -2$$



	عنوان الدرس : الإحصاء المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 6 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
❖ قراءة و تأويل الجدول الإحصائي و مخطط بالقضبان و مخطط قطاعي و تحديد الساكنة الإحصائية . ❖ تقديم متسلسلة إحصائية على شكل جدول أو تمثيلها على شكل مخطط أو مبيان. ❖ تصنيف معطيات إحصائية. ❖ حساب الحصيص المتراكم. ❖ حساب التردد المتراكم. ❖ حساب المعدل الحسابي. ❖ إنشاء تمثيلات مبيانية.	❖ تحديد القيمة الوسطية والمنوال لمتسلسلة إحصائية. ❖ حساب المعدل الإحصائي لمتسلسلة إحصائية باستعمال الآلة الحاسبة غير العلمية. ❖ توظيف التمثيلات المبيانية الاعتيادية في حل مسائل.	❖ ينبغي الحرص على أن تكون المعطيات الإحصائية موضوع الدراسة، حقيقية ومستسقاة من مجالات متنوعة، اجتماعية أو اقتصادية أو علمية، ذات صلة بالحياة العامة للتلميذ ومن مواد دراسية أخرى يتعود التلاميذ من خلالها على جمع المعطيات وتنظيمها في جداول و مبيانات. ❖ يتم حساب الوسيطات الإحصائية وتأويلها بهدف الإجابة على تساؤلات مرتبة بدراسة الظواهر والقيام باستنتاجات. ❖ تتم مقارنة متسلسلتين إحصائيتين من خلال كشفين أو تمثيلين مبيانيين.

		❖ يمكن استغلال البر انم المعلوماتية المندمجة في الحواسب في حدود المتوفر بالمؤسسات التعليمية.

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
I_ تـذكيـــــــر : 1) – الساكنة الإحصائية : الساكنة الإحصائية هي المجموعة التي تخضع لعملية الإحصاء و كل عنصر منها يسمى فردا أو وحدة إحصائية . 2) – الميزة : الميزة هي الظاهرة التي تتم دراستها و هي مجموعة من القيم أو الأصناف و تنقسم إلى قسمين : ➢ ميزة كمية : نقط تلاميذ – عدد الأطفال – السن – الطول ... ➢ ميزة كيفية : فصيلة الدم – الجنس ... 3) – الحصيص : الحصيص هو عدد الوحدات التي تأخذها كل قيمة من قيم الميزة . 4) – الحصيص المتراكم : الحصيص المتراكم لقيمة من قيم الميزة هو مجموعة حصيصات القيم التي تصغر أو تساوي هذه القيمة . 5) – التردد : تردد قيمة من قيم الميزة هو خارج حصيصها على الحصيص الإجمالي . 6) – التردد المتراكم : التردد المتراكم الموافق لقيمة من قيم الميزة هو نسبة الحصيص المتراكم الموافق لهذه القيمة و الحصيص	تمرين1 بعد تصحيح إحدى الفروض المحروسة لمادة الرياضيات أدرج الأستاذ الجدول الآتي : النقط: 5 – 8 – 10 – 12 – 14 – 20 عدد التلاميذ: 7 – 10 – 13 – 4 – 5 – 1 1) – ما هي الميزة المدروسة في هذه السلسلة الإحصائية ؟ 2)- ما هي قيم الميزة ؟ 3) – ما هو حصيص الميزة 14 ؟ 4) – ما هو الحصيص الإجمالي لهذه السلسلة الإحصائية ؟ 5) – أنشئ جدول الحصيصات المتراكمة . 6) – أنشئ جدول الترددات و الترددات المتراكمة . 7) – أنشئ التمثيل المبياني لهذه السلسلة الإحصائية .

الإجمالي .

II _ جدول الحصيصات و الحصيصات المتراكمة و الترددات و الترددات المتراكمة :

1) – مثــال_1_ (متسلسلة بالقيم) :

بالجدول الآتي يعطي تصنيفا للمواد المدرسة بالثالثة ثانوي إعدادي حسب معاملاتها :

قيم الميزة (المعاملات)	1	2	3	5
الحصيص (عدد المواد)	3	2	2	3
الحصيص المتراكم	3	5	7	10
التردد	0,3	0,2	0,2	0,3
التردد المتراكم	0,3	0,5	0,7	1

2) – مثــال_2_ (متسلسلة بالأصناف) :

الجدول الآتي يعطينا نتائج حول قامات أشخاص مصنفة إلى أربعة أصناف :

الصنف	$120 \leq t < 130$	$130 \leq t < 140$	$140 \leq t < 150$	$150 \leq t < 160$
الحصيص	9	11	12	18
الحيص المتراكم	9	20	32	50
التردد	0,18	0,22	0,24	0,36
التردد المتراكم	$\frac{9}{50}$	$\frac{20}{50}$	$\frac{32}{50}$	1

تمرين 2

الجدول التالي يقدم لنا عدد الأطفال لبعض الأسر :

عدد الأطفال	عدد الأسر
0	8
1	12
2	10
3	11
4	9
5	20

1) – أنشئ جدول الحصيصات المتراكمة.
2) – أنشئ جدول الترددات و الترددات المتراكمة.
3) – أحسب المعدل الحسابي لهذه السلسلة الإحصائية
4) – حدد القيمة الوسطية و منوال هذه السلسلة الإحصائية .

تمرين 3

III _ المعدل الحسابي أو القيمة المتوسطة لمتسلسلة إحصائية :

1) – تعريف :

المعدل الحسابي (أو القيمة المتوسطة) لمتسلسلة إحصائية هي :

خارج _مجموع جداءات قيم الميزة (أو مراكز الأصناف) في الحصيصات الموافقة لها

على _الحصيص الإجمالي_

و يرمز له بالرمز m .

2) – مثال_1_ (متسلسلة بالقيم):

لنحسب المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية في المثال_1 _ أعلاه :

قيم الميزة (المعاملات)	1	2	3	5
الحصيص (عدد المواد)	3	2	2	3

الكشف الآتي يعطي نقط إحدى الفروض المحروسة لمادة اللغة الفرنسية :

12 - 12 - 15 - 11,5 - 07 - 09,5 - 09 -
10 - 10 - 13,5 - 15 - 15 - 18
10 - 12 - 07 - 11 - 13 - 15 - 09,5 -
10 - 10 - 13 - 09

1) – أعط جدول الحصيصات و الحصيصات المتراكمة .

2) – أعط جدول الترددات و الترددات المتراكمة .

3) – أنشئ التمثيل المبياني لهذه السلسلة الإحصائية .

4) – كـم عدد تلاميذ هذا القسـم ؟

5) – أحسب المعدل الحسابي و منوال هذه السلسلة الإحصائية .

6) – حدد القيمة الوسطية لهذه السلسلة الإحصائية .

تمرين 4

الجدول الآتي يمثل معلومات حول معدل الدورة الأولى لإحدى أقسام الثانوي الإعدادي :

لدينا :

$$m = \frac{1\times3+2\times2+3\times2+5\times3}{10}$$

$$m = \frac{3+4+6+15}{10}$$

$$m = \frac{28}{10}$$

$$m = 2,8$$

3) – مثال_2_ (متسلسلة بالأصناف):

لنحسب المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية في المثال_2_ أعلاه :

* / قاعـدة :

إذا كان $a \le x \le b$ صنفا لمتسلسلة إحصائية

فإن مركزه هو العدد $\frac{a+b}{2}$

لدينا :

الصنف	$120 \le t < 130$	$130 \le t < 140$	$140 \le t < 150$	$150 \le t < 160$
الحصيص	9	11	12	18
مركز الصنف	125	135	145	155

الميزة	7	8	10	12	14	15
الحصيص						
التردد	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{6}$
الحصيص المتراكم						
التردد المتراكم						

1) – أتمم الجدول أعلاه إذا علمت أن عدد تلاميذ هذا القسم هو 30 تلميذا .

2) – أحسب المعدل الحسابي لهذه السلسلة الإحصائية

3) – حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية .

تمرين 5

الجدول الآتي يبين توزيع الأجر الشهرية لعمال إحدى المؤسسات :

الحصيص	الأجـرة ب DH
25	$4500 \le S < 4700$

إذن :

$$m = \frac{9\times125+11\times135+12\times145+18\times155}{50}$$

$$m = \frac{1125+1485+1740+2790}{50}$$

$$m = \frac{7140}{50}$$

$$m = 142,8$$

IV _ القيمة الوسطية لمتسلسلة إحصاية :

1) – تعريف :

القيمة الوسطية لمتسلسلة إحصائية هي :

قيمة الميزة التي لها أصغر حصيص متراكم أكبر من أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي

2) – مثال_1_ (متسلسلة بالقيم):

لنحسب القيمة الوسطية للمتسلسلة الإحصائية في المثال_1 _ أعلاه :

قيم الميزة (المعاملات)	1	2	3	5
الحصيص (عدد المواد)	3	2	2	3
الحصيص المتراكم	3	5	7	10

$4700 \le S < 4900$	110
$4900 \le S < 5100$	180
$5100 \le S < 5300$	125
$5300 \le S < 5500$	50
$5500 \le S < 5700$	40

1) – كم عدد عمال هذه المؤسسة ؟

2) – أحسب معدل أجر هذه المؤسسة .

3) – حدد الميزة المئوية للميزة $5100 \le S < 5300$

4) – أعط جدول الحصيصات المتراكمة و الترددات و الترددات المتراكمة لهذه المتسلسلة الإحصائية .

5) – حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية .

6) – مثل لهذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط قطاعي .

تمرين 6

في سنة 1997 أنتجت روسيا 48557 مليار متر مكعب من الغاز الطبيعي، و أنتجت إيران 29887 مليار متر مكعب ، و أنتجت قطر 10934 مليار متر مكعب، أما الجزائر فقد أنتجت 6919 مليار متر مكعب .

1) – رتب تصاعديا هذه الدول حسب إنتاجها من الغاز الطبيعي .

لدينا : $\frac{10}{2} = 5$.

إذن : أصغر حصيص متراكم أكبر من أو يساوي 5 هو 5 الموافق لقيمة الميزة 2.
و منه فإن القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية هو 2 .

3) – مثال_2_ (متسلسلة بالأصناف):

لنحسب القيمة الوسطية للمتسلسلة الإحصائية في المثال_2_ أعلاه :

الصنف	$120 \le t < 130$	$130 \le t < 140$	$140 \le t < 150$	$150 \le t < 160$
الحصيص	9	11	12	18
الحيص المتراكم	9	20	32	50

لدينا : $\frac{50}{2} = 25$.

إذن : أصغر حصيص متراكم أكبر من أو يساوي 25 هو 32 الموافق للصنف $140 \le t < 150$.
و منه فإن الصنف الذي يحتوي على القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية هو $140 \le t < 150$.

2) – أعط جدول الحصيصات و الحصيصات المتراكمة

3) – أعط جدول الترددات و الترددات المتراكمة .

4) – أنشئ مبيان هذه المتسلسلة الإحصائية .

5) – حدد القيمة الوسطية و منوال هذه المتسلسلة الإحصائية .

V _ المنــوال :

1) – تعريف :

منــوال متسلسلة إحصائية هو كل قيمة أو صنف أو نوع له أكبر حصيص

2) – مثال_1_ (متسلسلة بالقيم):

لنحدد منــوال المتسلسلة الإحصائية في المثال_1 _ أعلاه :

قيم الميزة (المعاملات)	1	2	3	5
الحصيص (عدد المواد)	3	2	2	3

لدينا : أكبر حصيص هو 3 و نلاحظ أن هناك قيمتين للميزة موافقتين لهذا الحصيص هما 1 و 5 .

إذن : لهذه المتسلسلة الإحصائية منوالين هما : 1 و 5 .

3) – مثال_2_ (متسلسلة بالأصناف):

لنحدد الصنف المنــوال المتسلسلة الإحصائية في المثال_2 _ أعلاه :

الصنف	$120 \leq t < 130$	$130 \leq t < 140$	$140 \leq t < 150$	$150 \leq t < 160$
الحصيص	9	11	12	18

لدينا : أكبر حصيص هو 18 الموافق للصنف $150 \leq t < 160$.

إذن : الصنف المنــوال لهذه المتسلسلة الإحصائية هو : $150 \leq t < 160$.

VI_ التشتت :

1) – تعريف :

نعتبر متسلسلتين إحصائيتين S_1 و S_2 لهما نفس المعدل الحسابي m .

نقول S_1 أقل تشتتا من S_2 يعني أن قيم ميزة S_1 أقرب إلى المعدل الحسابي m من قيم الميزة S_2.

2) – مثال :

نعتبر الجدول الآتي :

الفروض	الفرض 1	الفرض 2	الفرض 3	الفرض 4	الفرض 5
نقط التلميذ حسن	9	14	10	13	14
نقط التلميذ خالد	8	16	10	17	9

لدينا :

*/ معدل حسن هو :

$$m_1 = \frac{9+14+10+13+14}{5}$$

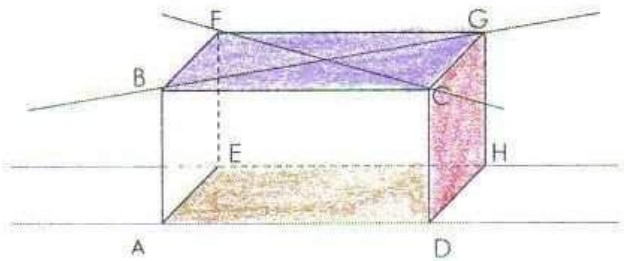
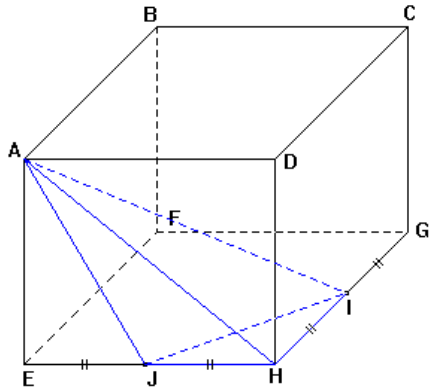
$$m_1 = \frac{60}{5} = 12$$

*/ معدل خالد هو :

	$m_2 = \frac{8+16+10+17+9}{5}$ $m_2 = \frac{60}{5} = 12$ إذن : $m_1 = m_2$ أي : حسن و خالد لهما نفس المعدل. نلاحظ أن نقط حسن أقرب إلى المعدل 12 من نقط خالد. نقول إذن : نقط حسن أقـل تشتتا من نقط خالد .

دادة	عنوان الدرس : الهندسة الفضائية المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي مدة الإنجاز : 8 ساعات من إعداد وتقديم : ذ. المصطفى ترشيش	

المكتسبات القبلية	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
❖ إنشاء نموذج موشور قائم قاعدته مثلث أو متوازي أضلاع أبعاده معلومة. ❖ إنشاء نموذج لأسطوانة قائمة قاعدتها دائرة و شعاعها معلوم. ❖ تمثيل مجسم دون استعمال الأدوات الهندسية. ❖ التمكن من نشر المجسمات وتمثيلها وإنشاء نماذج لها. ❖ حساب المساحات و الحجوم.	❖ التعرف على حجوم المجسمات الاعتيادية التالية : متوازي المستطيلات ، المكعب ، الهرم المنتظم ، الأسطوانة القائمة. ❖ تطبيق مبرهنة فيتاغورس لحساب بعض الأطوال والحجوم في المجسمات الاعتيادية. ❖ التعرف على أثر تكبير أو تصغير على الأطوال و المساحات والحجوم. ❖ استعمال تكبير و تصغير الأشكال في حل مسائل.	❖ تعتبر جميع صيغ المساحات و الحجوم مقبولة في هذا المستوى. ❖ ينبغي دراسة وإبراز بعض الأوضاع النسبية و التعامد من خلال أنشطة حول الموشور القائم. ❖ يبرهن على أنه إذا كان معامل التكبير أو التصغير هو K فإن : ❖ الطول يضرب في k و المساحة في k^2 و الحجم في K^3

سير الدرس (أنشطة تمهيدية) + المحتوى (ملخص الدرس)	تمارين تقويمية و منزلية
1) الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء أ) المستقيمان المستويين مثال لنعتبر الشكل الهندسي التالي حيث ABCDEFGH متوازي المستطيلات  	تمرين1 ABC مثلث قائم الزاوية في A و E نقطة خارج المستوى (ABC) بحيث : ABE مثلث قائم الزاوية في A . لتكن M نقطة من المستقيم (EC) . 1) – أرسم شكلا مناسبا. 2) – بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (ACE) . 3) – استنتج أن المثلث ABM قائم الزاوية في A . تمرين2 نعتبر الشكل جانبه : 

* نلاحظ أن المستقيمين (BG) و (FC) يوجدان ضمن المستوى (BCG) وهما متقاطعان
نقول (BG) و (FC) مستقيمان مستوانيين
* ونلاحظ أن المستقيمين (AD) و (EH) يوجدان ضمن المستوى (ADH) وهما متوازيين
نقول كذلك (AD) و (EH) مستقيمان مستوانيين

ملاحظة: كل مستقيمين متقاطعين أو متوازيين فهما مستوانيين

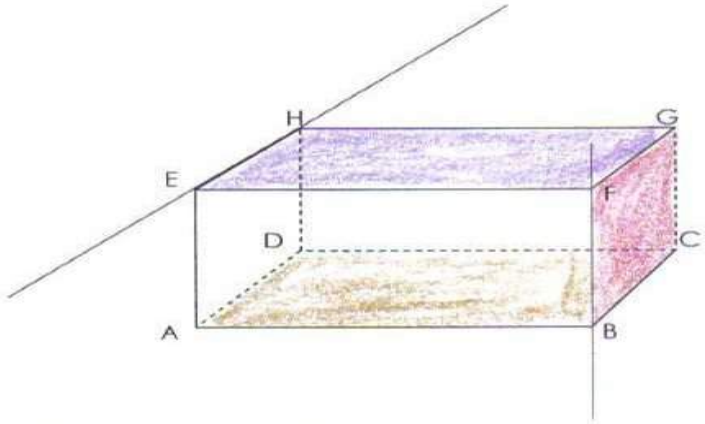
تعريف

المستقيمان المستوانيان هما كل مستقيمين موجودين ضمن نفس المستوى

ب) المستقيمان غير المستوانيين

مثال

لنعتبر الشكل الهندسي التالي حيث ABCDEFGH متوازي المستطيلات



* نلاحظ أن المستقيم (EH) يوجد ضمن المستوى (EFG) و المستقيم (BF) يخترق المستوى (EFG) في النقطة F
نقول (EH) و (BF) مستقيمان غير مستوانيين

ملاحظة: المستقيمان غير المستوانيين ليس بمتوازيين و لا بمتقاطعين وهما من المستحيل ان يكونا معا في نفس المستوى

تعريف

المستقيمان غير المستوانيين هما كل مستقيمين أحدهما يوجد ضمن مستوى والآخر مخترق لهذا المستوى

ج) تمرين محلول

ليكن SABC رباعي أوجه رأسه S . و النقطة I منتصف [SC] و J منتصف [SB]
1) أنشئ الشكل
2) بين أن (IJ) و (BC) مستوانيين
3) بين الوضع النسبي للمستقيمين (IJ) و (AS)

ABCDEFGH مكعب بحيث :
AB = 4 cm و I منتصف [GH] و J منتصف [EH] .
1) – بين أن (IJ) يوازي (AC) .
2) – بين أن (EI) ⊥ (AE) .
3) – أحسب : EI و AI .
4) – أحسب حجم الهرم AIJH .

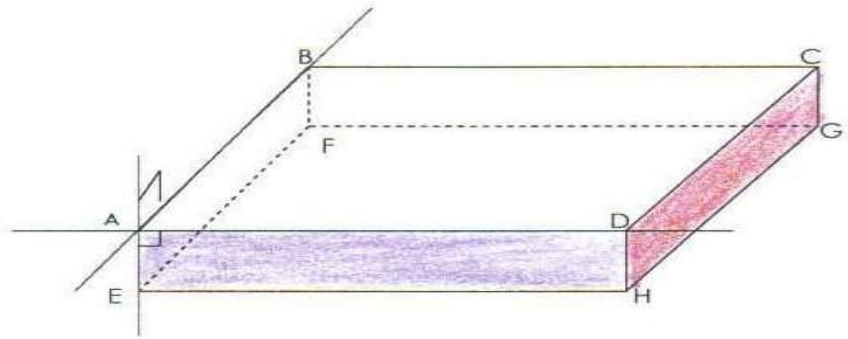
تمرين 3

نعتبر الشكـل جانبه بحيث :
SEFGH هرم قاعدته مستطيل بعداه EF = 6 cm
و FG = 4 cm و ارتفاعه SE = 6 cm.
المستقيم (SE) عمودي على المستوى (EFG).

2) تعامد مستقيم ومستوى

أ) تمهيد

لنعتبر ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث الشكل :



نلاحظ أن كل وجه من وجوه متوازي المستطيلات ABCDEFGH عبارة عن مستطيل

إذن : ABFE مستطيل و ADHE مستطيل

وبالتالي : المستقيم (AE) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (AD) في نقطة تقاطعهما A

وحيث (AB) و (AD) يوجدان ضمن المستوى (BAD)

فإننا نقول : المستقيم (AE) عمودي على المستوى (BAD)

ب) تعريف

نقول عن مستقيم أنه عمودي على مستوى في نقطة إذا كان هذا المستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين في هذه النقطة وموجودين ضمن هذا المستوى

ج) خصائص

تقبل الخصائص التالية :

خاصية 1

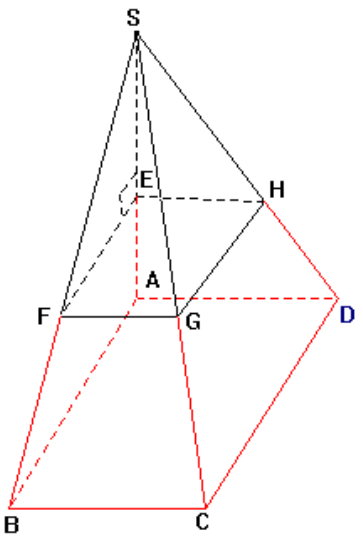
إذا كان مستقيم عمودي على مستوى في نقطة فإن هذا المستقيم سيكون عموديا على كل مستقيم مار بهذه النقطة وموجود بهذا المستوى

خاصية 2

إذا كان مستقيم عمودي على مستوى في نقطة فإن هذا المستقيم سيكون عموديا على كل مستقيم لايمر بهذه النقطة وموجود بهذا المستوى

خاصية 3

لكي يكون مستقيم عمودي على مستوى يجب أن يكون هذا المستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين موجودين ضمن هذا المستوى



1) – أثبت أن $(EG) \perp (SE)$.

2) – أحسب SG إذا علمت أن : $EG = 4\sqrt{2}$ cm

3) – أحسب V_1 حجم الهرم SEFGH .

4) – نفترض أن الهرم SABCD هو تكبير للهرم SEFGH .

أحسب V_2 حجم الهرم SABCD علما أن نسبة التكبير هي $\frac{5}{2}$

تمرين 4

لاحظ الشكـل أسفله بحيث :

SABCD هرم رأسه S وقاعدته المستطيل

د) **تطبيقات**

تمرين 1

ليكن ABCD رباعي أوجه حيث : ABC و ABD مثلثين قائما الزاوية في B

1) أنشئ الشكل

2) بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (BCD)

3) لتكن M نقطة ما من المستقيم (DC)

أ) أتم الشكل

ب) بين أن ABM مثلث قائم الزاوية

تمرين 2

ليكن HMAD رباعي أوجه منتظم (كل وجه من وجوهه عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع)

O منتصف [AD]

1) أنشئ الشكل

2) بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوى (MOH)

3) بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستقيم (MH)

3) تطبيق مبرهنة فيتاغورس في الفضاء

أ) حساب طول قطر متوازي المستطيلات القائم

a) تمرين تمهيدي

ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات قائم حيث: AB=xcm و BC=ycm و BF=zcm

1) أنشئ شكل هندسي

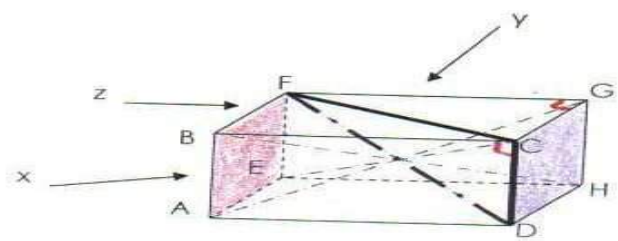
2) حدد في الشكل جميع أقطار ABCDEFGH

ماذا يمكنك ملاحظته حول هذه الأقطار ومنتصفاتها؟

3) أحسب FD

إشارة للحل

1) الشكل الهندسي



ABCD

المستقيم (AS) عمودي على المستوى $(ABCD)$

$AB = AS = 6$ cm و $BC = 3$ cm

.

1) – أثبت أن SAB و SAC مثلثان قائما الزاوية

و متساويا الساقين.

2) – استنتج حساب : SB و SC .

3) – أحسب AC .

4) – أحسب V حجم الهرم SABCD .

5) – نعتبر SA’B’C’D’ تصغيرا للهرم SABCD بنسبة $\frac{1}{3}$.

أ) -- أحسب S’ مساحة الهرم SA’B’C’D’ .

ب) -- أحسب V’ حجم الهرم SA’B’C’D’ .

2) تحديد الأقطار

من خلال الشكل سنستنتج أن لـABCDEFGH أربعة أقطار متقايسة ولها نفس المنتصف

3) حساب FD

* نطبق مبرهنة فيتاغورس على المثلث القائم الزاوية FGC في G فنجد :

$$(1)\ FC^2=FG^2+CG^2= y^2+z^2$$

* ونطبق مبرهنة فيتاغورس على المثلث القائم الزاوية FCD في C فنجد :

$$(2)\ FD^2=CD^2+FC^2$$

من (1) و (2) نجد : $FD^2=x^2+y^2+z^2$

وبالتالي: $FD=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

b) قاعدة

لمتوازي المستطيلات القائم أربعة أقطار متقايسة ولها نفس المنتصف

إذا كانت أبعاده هي xcm و ycm و zcm فإن طول أي قطر فيه هو $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ cm

c) تمرين تطبيقي

ليكن ABCDEFGH مكعب طول قطر له هو 9cm

احسب طول حرفه

ب) حساب ارتفاع رباعي أوجه منتظم

a) تمرين تمهيدي

لنعتبر SABC رباعي أوجه منتظم رأسه S وطول حرفه acm

M منتصف [BC] و N منتصف [AC] و G مركز ثقل المثلث ABC

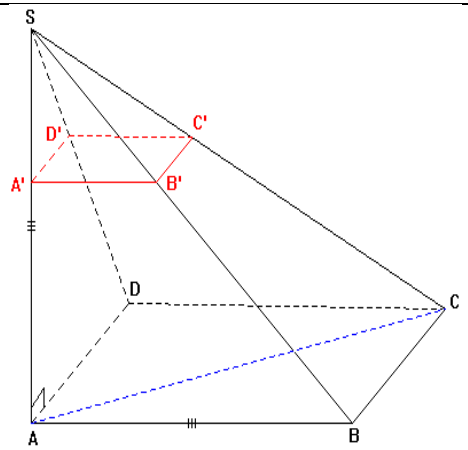
1) أنشئ الشكل

2) بين أن المستقيم (SG) عمودي على المستوى (ABC)

3) أحسب SG ارتفاع رباعي الأوجه المنتظم SABC

إشارة للحل

1) شكل هندسي



تمرين 5

ليكن SABCD هرما منتظما قاعدته المربع ABCD مركزه O.

(أنظر الشكـل أسفله) بحيث :

BC = 6 cm و SO = 10 cm .

M و N و P و Q هي على التوالي منتصفات : [SA] و [SB] و [SC] و [SD] .

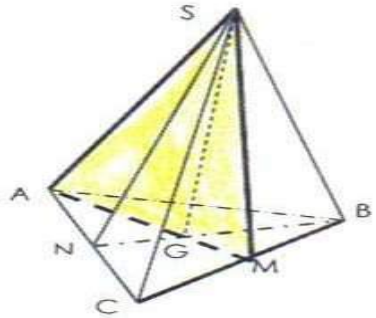
1) – أحسب MN معللا جوابك.

2) – أحسب S مساحة قاعدة الهرم SABCD

3) – أحسب V حجم الهرم SABCD .

4) – نفترض أن SMNPQ هو تصغير الهرم SABCD .

أ) -- حدد نسبة هذا التصغير.



2) لنبين أن (SG) عمودي على المستوى (ABC)

لدينا ABC مثلث متساوي الأضلاع و M منتصف [BC] إذن (BC) عمودي على (AM)

ولدينا SBC مثلث متساوي الأضلاع و M منتصف [BC] إذن (BC) عمودي على (SM)

وبما أن (SM) و (AM) مستقيمان متقاطعان ضمن المستوى (SAM) وهما عموديان على (BC)

فإن (BC) عمودي على المستوى (SAM)

وحيث (SG) ضمن المستوى (SAM) فإن (BC) عمودي على (SG) (1)

وسنجد كذلك (AC) عمودي على (SG) (2)

من (1) و (2) نجد (SG) عمودي على المستوى (ABC)

3) لنحسب SG

لدينا (SG) عمودي على المستوى (ABC) و (AM) ضمنه

إذن (SG) عمودي على (AM) في G

وبالتالي SAG مثلث قائم الزاوية في G

وتطبيقا لمبرهنة فيتاغورس نجد: $AS^2=SG^2+AG^2$ (1)

وحيث G مركز ثقل المثلث ABC فإن $AG=\frac{2}{3}AM$ إذن $AG^2=\frac{4}{9}AM^2$ (2)

وبما أن AMC قائم الزاوية في M و $AC=a\ cm$ و M منتصف [BC] وحسب مبرهنة فيتاغورس

فإن : $AM^2=a^2-\frac{1}{4}a^2$ أي $AM^2=\frac{3}{4}a^2$ (3)

من (1) و (2) و (3) نجد : $AS^2=SG^2+\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}a^2$ أي $a^2=SG^2+\frac{1}{3}a^2$ (لأن $AS=a\ cm$)

إذن $SG^2=\frac{2}{3}a^2$

وبالتالي $SG=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\ cm$ أي $SG=a\frac{\sqrt{6}}{3}cm$

b) قاعدة

ارتفاع رباعي أوجه منتظم طول حرفه $a\ cm$ هو $a\frac{\sqrt{6}}{3}cm$

c) تمرين تطبيقي

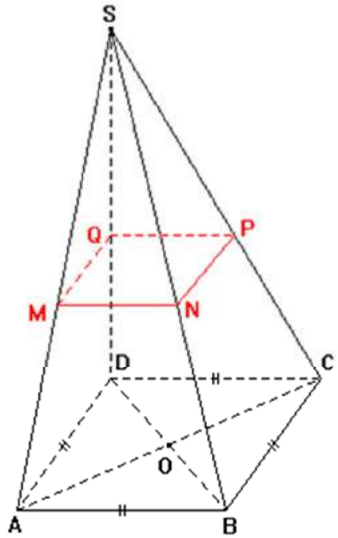
ليكن ABCD رباعي أوجه منتظم ارتفاعه 6cm

أحسب طول حرفه

4) الحجوم

أ) ملخص

ب) -- استنتج S' و V' مساحة و حجم الهرم SMNPQ .



تمرين 6

نعتبر EFGH مكعب طول حرفه 3 cm و K منتصف [DH] .

1) – أرسم شكـلا مناسبا.

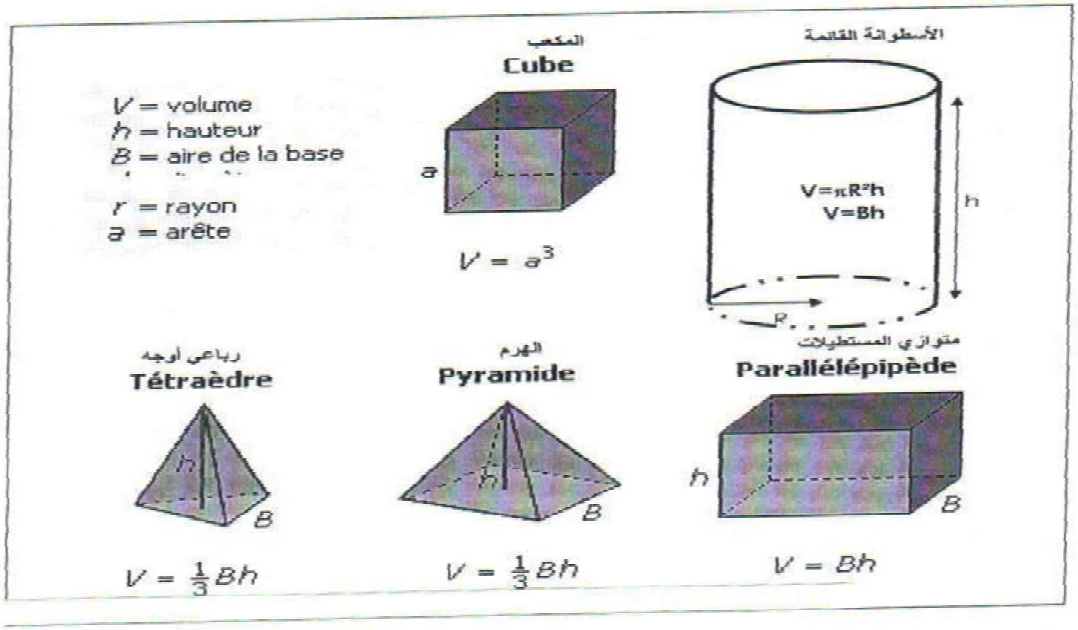
2) – أثبت أن HBD مثلث قائم الزاوية.

3) – أحسب : HB و DB .

4) – نعتبر P المسقط اعمودي للنقطة D على المستقيم (HB) .

أحسب : DP و HP .

5) – أحسب حجم رباعي الأوجه KDAC



ب) تطبيقات

تمرين 1

ليكن SABC رباعي أوجه منتظم طول حرفه 3cm

1) أحسب مساحة قاعدته

2) أحسب طول ارتفاعه

3) أحسب حجمه

تمرين 2

ليكن ABCDEFGH مكعب طول حرفه7cm

1) أنشء الشكل

2) أحسب حجم ABCDEFG

3) أحسب حجم رباعي الأوجه GEBF

تمرين 3

ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات قائم أبعاده على التوالي هي 2cm و3cm و 5cm

1) أنشئ الشكل

2) أحسب حجم ABCDEFGH

3) لنعتبر الأسطوانة القائمة التي قاعدتيها الدائرتان المحيطتان على التوالي بـABCD و EFGH

أحسب حجم التجويف الموجود بين هذه الأسطوانة ومتوازي المستطيلات ABCDEFGH

تمرين 7

نعتبر الشكـل أسفله بحيث :

ABCD رباعي الأوجه قاعدته مثلث متساوي الأضلاع $AD = 6$ cm

و H المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (ABD)

1) أحسب AB إذا علمت أن :

$AH = 5\sqrt{3}$ cm و $BG = 2$ cm .

2) – لتكن I منتصف [AD] .

أحسب BI .

3) – أحسب S المساحة الجانبية لرباعي الأوجه ABCD .

4) – أحسب حجم V حجم رباعي الأوجه ABCD.

5) – نعتبر رباعي الأوجه BEFG تصغيرا لرباعي الأوجه ABCD .

إذا علمت أن نسبة التصغير هي $\frac{2}{3}$ فاحسب S' مساحة و V' وحجم رباعي الأوجه BEFG .

5) التكبير والتصغير

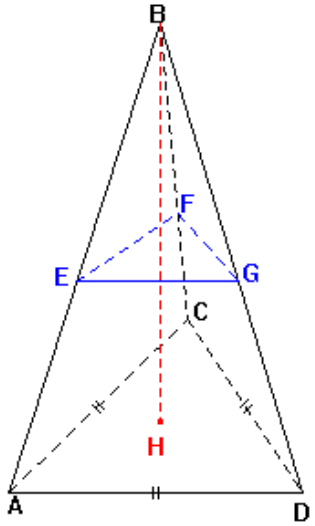
أ) تعريف

انطلاقا من مجسم نستخرج مجسما آخر يشابهه وذلك بضرب أبعاده في عدد حقيقي K موجب قطعا ويخالف 1.

ب) ملاحظة

* للقيام بتكبير مجسم يجب أن يكون K اكبر من 1 قطعا ،ونقول إننا قمنا بتكبير نسبته K

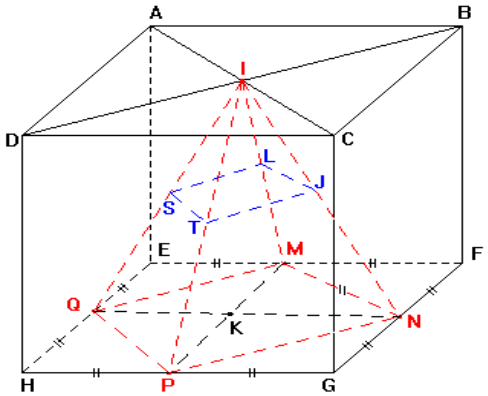
* للقيام بتصغير مجسم يجب أن يكون K أكبر قطعا من 0 وأصغر قطعا من 1، ونقول إننا قمنا بتصغير نسبته K



تمرين8

ABCDEFGH مكعب حيث : AB = 10 .

M و N وP و Q منتصفات [EF] و [FG] و[GH] و[HE] على التوالي .



1) – أحسب مساحة قاعدة للمكعب ABCDEFGH .

2) – أحسب حجم ABCDEFGH .

3) – أحسب : MN و PN و MP .

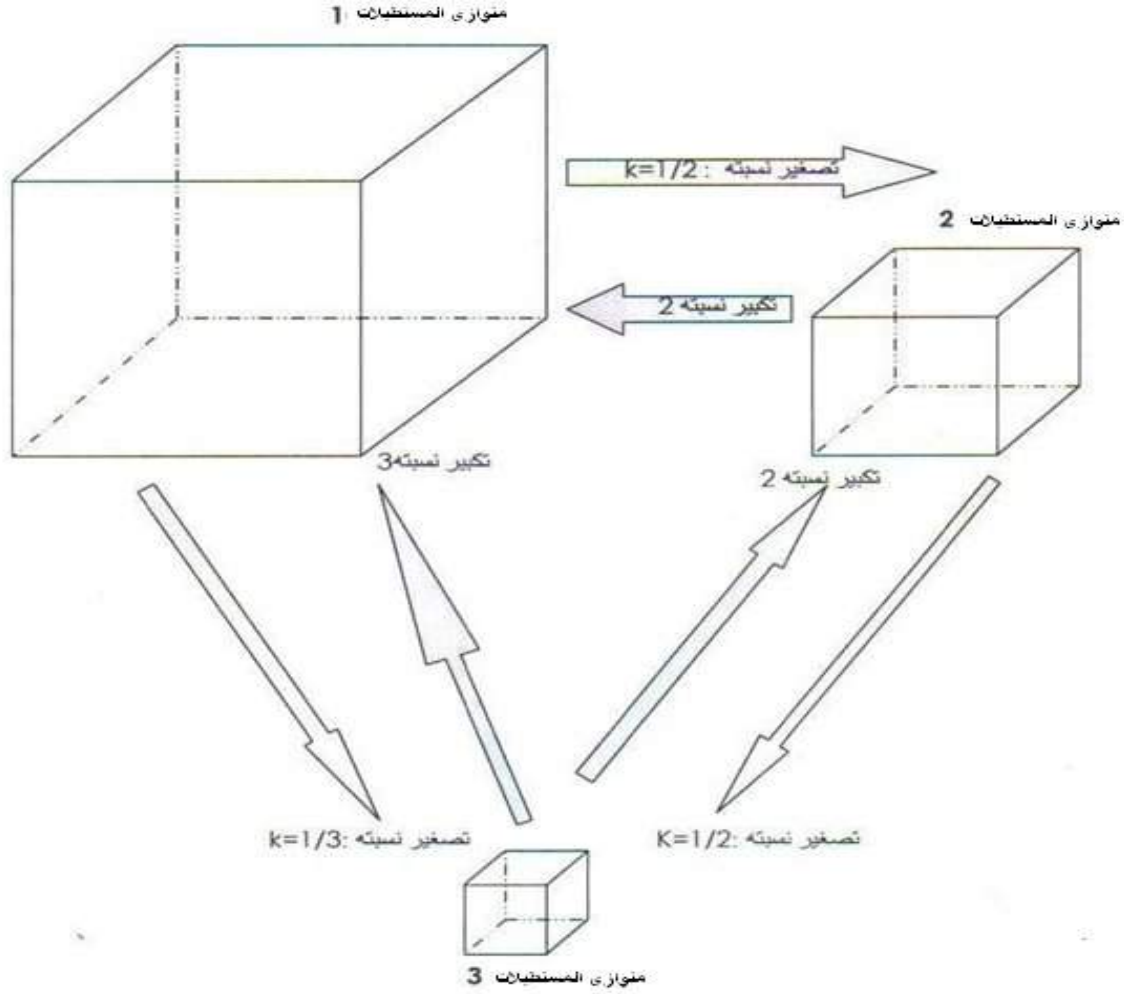
4) – استنتج طبيعة المثلث MNP .

5) – ماذا تستنتج عن الهرم INPQM .

6) – أحسب حجم الهرم INPQM علما أن ارتفاعه IK = 10 .

7) – استنتج حجم الهرم ISLJT علما أنه تصغير للهرم IMNPQ بنسبة $\frac{1}{4}$.

ج) مثال



متوازي المستطيلات 1 هو تكبير متوازي المستطيلات 2 بنسبة تكبير تساوي 2

متوازي المستطيلات 3 هو تصغير متوازي المستطيلات 1 بنسبة تصغير تساوي 1/3

متوازي المستطيلات 2 هو تصغير متوازي المستطيلات 1 بنسبة تصغير تساوي 1/2

د) **أثر التكبير والتصغير على المساحات والحجوم**

❶ **تمرين تمهيدي**

ليكن SABC رباعي أوجه منتظم رأسه s وطول حرفه a cm

E منتصف [SA] و F منتصف [SB] و P منتصف [SC]

1) أنشئ الشكل

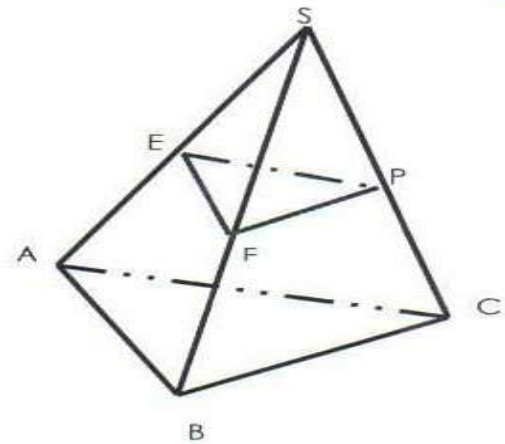
2) بين أن رباعي الأوجه SEFP تصغير لرباعي الأوجه SABC محددا نسبة التصغير

3) أحسب مساحة كل من ABC و EFP . ماذا تلاحظ؟

4) أحسب حجم كل من رباعي الأوجه SABC و SEFP . ماذاتلاحظ؟

إشارة للحل

1)شكل هندسي



2) لنبين تصغير رباعي الأوجه SEFP مع تحديد نسبة التصغير

*لدينا E منتصف [SA] و F منتصف [SB]
إذن (EF) يوازي (AB) في المثلث SAB
وبالتالي حسب خاصية طاليس نجد : $\frac{SE}{SA}=\frac{SF}{SB}=\frac{EF}{AB}=\frac{1}{2}$ (1)

*ولدينا P منتصف [SC] و F منتصف [SB]
إذن (FP) يوازي (BC) في المثلث SBC
وبالتالي حسب خاصية طاليس نجد : $\frac{SF}{SB}=\frac{SP}{SC}=\frac{FP}{BC}=\frac{1}{2}$ (2)

* ولدينا P منتصف [SC] و E منتصف [SA]
إذن (EP) يوازي (AC) في المثلث SAC
وبالتالي حسب خاصية طاليس نجد : $\frac{SP}{SC}=\frac{SE}{SA}=\frac{EP}{AC}=\frac{1}{2}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نجد : $\frac{SF}{SB}=\frac{EF}{AB}=\frac{SP}{SC}=\frac{FP}{BC}=\frac{EP}{AC}=\frac{1}{2}$

إذن أطوال أضلاع رباعي الأوجه SEFP متناسبة على التوالي مع أطوال أضلاع رباعي الأوجه SABCD حيث 1/2 معامل التناسب
وبالتالي SEFP و SABC متشابهان حيث 1/2 معامل التشابه
إذن رباعي الأوجه SEFP تصغير لرباعي الأوجه SABC حيث نسبة التصغير هي K=1/2

3) لنحسب مساحة كل من القاعدة ABC و EFP

بما أن ABC مثلث متساوي الأضلاع طول حرفه a cm فإن مساحته S هي : $S=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

وبما أن EFP مثلث متساوي الأضلع طول حرفه a/2 cm فإن مساحته 'S هي: $S'=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

نلاحظ ان $\frac{\sqrt{3}}{8}=1/4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ أي $\frac{\sqrt{3}}{8}=(1/2)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن $\boxed{S'=K^2\times S}$

4) لنحسب حجم كل من رباعي الأوجه SABC ورباعي الأوجهSEFP

بما أن SABC رباعي أوجه منتظم طول حرفه a cm(قاعدته ABC)

فإن ارتفاعه h هو: $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a\ cm$

وبالتالي حجمه V هو: $V=\frac{1}{3}\times h\times S$ (1)

وبما أن SEFP رباعي أوجه منتظم طول حرفه a/2 cm (قاعدته EFP)

فإن ارتفاعه 'h هو : $h'=\frac{\sqrt{6}}{6}a\ cm$ أي $h'=\frac{1}{2}h$ أي $h'=K\times h$

وبالتالي حجمه 'V هو: $V'=\frac{1}{3}\times h'\times S'$

أي $V'=\frac{1}{3}\times K\times h\times K^2\times S$ (2)

من (1) و(2) نجد : $\boxed{V'=k^3\times V}$

● قواعد

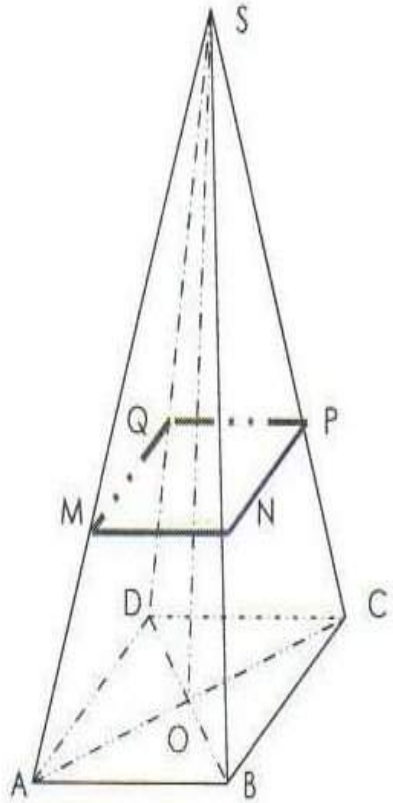
١) قاعدة 1

إذا كانت $\mathcal{S}$ مساحة شكل هندسي في البداية و $\mathcal{S}'$ مساحة الشكل المحصل عليه بعد التكبير أو التصغير الذي نسبته K فإن : $\mathcal{S}'=K^2.\mathcal{S}$

٢) قاعدة 2

إذا كان V حجم مجسم في البداية و 'V حجم المجسم المحصل عليه بعد التكبير أو التصغير الذي نسبته K فإن : $V'=K^3.V$

❸ **تمرين تطبيقي**



تمرين

لنعتبر الهرم المنتظم SABCD الذي رأسه S وقاعدته المربع ذو المركز O .
SMNPQ تصغير للهرم SABCD
حيث: $\frac{2}{3}$ نسبة التصغير
علما أن AB=5, 4cm
و OS=11cm

1) بين أن V حجم SABCD هو $106,92cm^3$
2) حدد مساحة MNPQ
3) حدد V' حجم SMNPQ